



Edition Risikomanagement 1.7



Law of Risk Management – aktive Risiko-Management-Strategien in der Kapitalanlage

Von Lutz Johanning, Lars Helge Haß und Timur Karabiber

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	4
1 Einleitung	5
2 Law of Risk Management	6
2.1 Risikowahrnehmung und Risikomaße	6
2.2 Risikoschätzung und Implikationen für die Portfolioallokation	7
2.3 Prognose der Parameter	8
2.4 Zusammenhang von Renditen und Volatilitätsänderungen	12



3	Risikoprognose	13	Anhang	
3.1	Modelle der Risikoprognose	13	I	Notation 20
3.2	Vergleich der Ergebnisse	15	II	Risikomaße 21
4	Risikoprognose in der Praxis	16	III	Parameterschätzung 24
4.1	Constant-Proportion-Portfolio Insurance-(CPPI-)Strategie	16	IV	Ökonometrische Schätzverfahren 28
4.2	Risikoprognosen und Simulationsaufbau	17	V	Optionspreistheoretisches Verfahren 39
5	Zusammenfassung und Praxisimplikation	19	VI	CPPI-Simulation 42
				Literatur 43
				Abbildungen 45
				Tabellen 46

Vorwort

Sehr geehrte Damen und Herren,

Asset Management war schon immer eine sehr komplexe Aufgabe. Die Finanzkrise hat zum Teil schmerzlich verdeutlicht, dass dabei dem Management der Anlagerisiken die größte Bedeutung zukommt. Erlittene Verluste aufzuholen ist immer der schwerste Weg und führt selten zur erwünschten Rendite.

Die nachfolgende Studie von Johanning, Haß und Karabiber macht aber Mut, zeigt sie doch als „Law of Risk Management“, dass Risiken vergleichsweise leichter zu prognostizieren sind als Renditen. Dies liegt daran, dass Risiken im Zeitablauf stabiler sind als Renditemittelwerte und deshalb mit weitaus geringeren Fehlern geschätzt werden können. Die Studie beschäftigt sich daher mit der Frage, ob Kapitalanlagestrategien durch eine Prognose des Risikos optimiert werden können. Sie arbeitet Schätz- und Prognoseeigenschaften des Risikos heraus und stellt Verfahren zur Prognose der Varianz und damit des Risikos vor. Abschließend wird die Anwendung des Law of Risk Management im Rahmen einer Wertsicherungsstrategie veranschaulicht; dabei wird ersichtlich, dass aktive Risikoprognosen im Rahmen von Asset-Management-Strategien einen Mehrwert liefern können.

Aktive Risikoprognosen können, so das Ergebnis der Studie, dazu beitragen, Vermögen auch in unruhigen Zeiten an den Kapitalmärkten durch Einhalten von Vermögensuntergrenzen zu sichern und zusätzlich höhere Renditen zu realisieren.

In Zukunft wird nach meinem Verständnis die qualitative Interpretation von quantitativen Risikomanagement-Kennzahlen an Bedeutung gewinnen. Die Kunst einer guten Risikosteuerung besteht darin, die gewonnenen Ergebnisse zu verstehen und die richtigen Schlüsse zu ziehen. Entscheidend ist dabei das Wissen um die Annahmen, die in den Analysen getroffen wurden, um die blinden Flecken der eingesetzten Modelle zu erkennen sowie um die Zusammenhänge zwischen den Risiken zu verstehen. Ich hoffe, dass Ihnen die vorliegende Studie hierfür Anregungen bietet.

Herzlichst Ihr

Alexander Schindler



1 Einleitung

Die langfristigen optimalen Portfoliogewichte bei der Kapitalanlage werden durch die Rendite- und Risikoerwartungen, die Liquiditätspräferenzen sowie Anlagerestriktionen der Anleger bestimmt.¹ Da größere Schätzfehler insbesondere bei der Renditeschätzung auftreten und Risiken im Zeitablauf stabiler sind, wird im Portfoliomanagement häufig ein großer Aufwand bei der Ermittlung der Erwartungswerte der Renditen erbracht und eine einfache historische Schätzung der Risiken verwendet. Bestimmte Portfoliomanagementansätze – wie passive Anlagestile, der Minimum-Varianz-Ansatz oder passive Wertsicherungskonzepte – kommen ganz ohne die Prognose von Renditen aus. Funke, Johanning und Rudolph (2006) zeigen, dass bei diesen Ansätzen insbesondere das Risikomanagement eine hohe Bedeutung hat.

Grundsätzlich sind Risiken im Zeitablauf zwar stabiler als Renditemittelwerte, allerdings sind sie alles andere als konstant. Renditezeitreihen weisen insbesondere ein Volatility-Clustering auf, d. h., auf eine hohe absolute Volatilität an einem Tag folgt mit hoher Wahrscheinlichkeit eine hohe absolute Volatilität am nächsten Tag. Es ergibt sich insofern die Frage, ob Kapitalanlagestrategien durch eine Prognose des Risikos optimiert werden können. Strategien, die wie die oben angeführten ganz ohne eine Renditeprognose auskommen, aber sinnvoll um eine Risikoprognose ergänzt werden können, bezeichnen wir nachfolgend als aktive Risiko-Management-Strategien.

Ziel der vorliegenden Studie ist es, den Mehrwert einer erfolgreichen Risikoprognose im Rahmen von Anlagestrategien wie beispielsweise Wertsicherungsstrategien aufzuzeigen. Die im Vergleich zur Strategie ohne Risikoprognose gemessene Risikoreduktion wird durch folgende zwei Eigenschaften generiert, die wir als Law of Risk Management² bezeichnen:

1. Risiken können mit weitaus geringeren Schätzfehlern als Renditen geschätzt werden.
2. Risiken sind im Zeitablauf konstanter und lassen sich deshalb weitaus besser prognostizieren als Renditen.

In Kapitel 2 wird ausgehend von verschiedenen Risikodefinitionen das Law of Risk Management erläutert, indem die Schätz- und Prognoseeigenschaften des Risikos herausgearbeitet werden. Darauf folgend werden die verschiedenen Risikoprognosemethoden in Kapitel 3 vorgestellt. In Kapitel 4 wird die Anwendung des Law of Risk Management im Rahmen einer Wertsicherungsstrategie illustriert. Ein Fazit der Überlegungen sowie Implikationen für die Praxis bilden den Abschluss der vorliegenden Untersuchung.



„Die Ergebnisse dieser Studie zeigen, dass ein aktives Portfoliomanagement keineswegs auf die Prognose von Renditen beschränkt ist, sondern gerade bei kurzfristigem Anlagehorizont die Prognose von Risiken beinhalten sollte.“

Prof. Dr. Lutz Johanning
ist Inhaber des Lehrstuhls
Empirische Kapitalmarkt-
forschung an der WHU –
Otto Beisheim School of
Management, Vallendar.

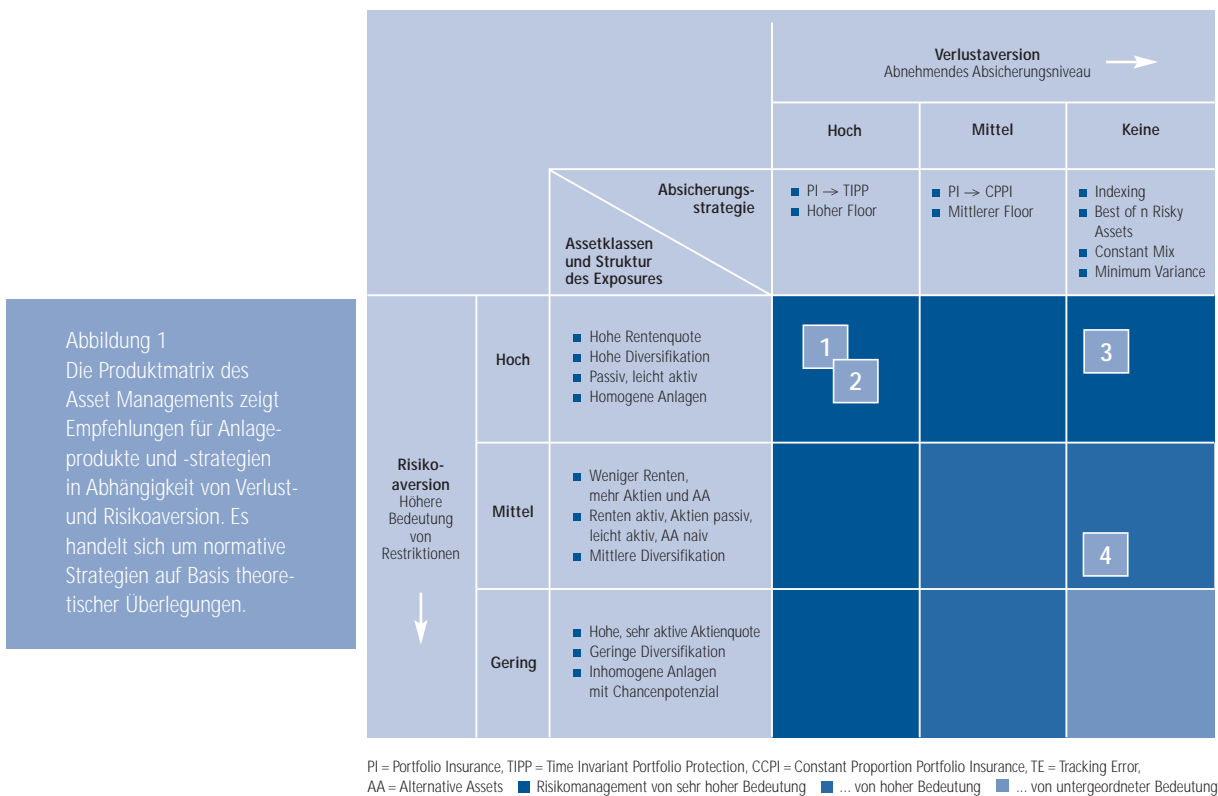
¹Vgl. Benk / Johanning (2008 a und b).

²Diese Bezeichnung wird in Anlehnung an das Fundamental Law of Active Management gewählt. Vgl. Grinold / Kahn (2000).

2 Law of Risk Management

2.1 Risikowahrnehmung und Risikomaße

Das Management von Anlagerisiken stellt für viele Investoren eine vorrangige Aufgabe dar. Funke, Johanning und Rudolph (2006) zeigen, dass Risiko eine investorenspezifische Kennzahl ist. Auf Basis einer Investorenbefragung bei über 160 institutionellen Anlegern weisen sie insbesondere nach, dass Risiko mehrere Dimensionen hat. Sie unterscheiden zwischen dem Risiko der absoluten Verlusthöhe („Worst-Case-Risiko“) und dem Risiko der Ergebnisabweichung („Going Concern Risiko“). Auf Basis dieser Unterscheidung leiten die Autoren die Asset-Management-Produktmatrix ab (siehe Abbildung 1). Die Präferenzen bezüglich der absoluten Verlusthöhe (Verlustaversion) werden auf der Abszisse, die Präferenzen bezüglich der Ergebnisschwankung (Risikoaversion) auf der Ordinate abgetragen. In der resultierenden Matrix ergeben sich neun Felder, die jeweils unterschiedliche Kombinationen von Verlust- und Risikoaversion kennzeichnen. Durch Investorenbefragungen und die Analyse von tatsächlichen Portfolios ergeben sich vier unterschiedliche Cluster, die in Abbildung 1 eingetragen sind. Viele Anleger bezeichnen sich selbst als hoch verlust- und zugleich risikoavers (Cluster 1 und 2). Andere Anleger zeigen aber auch geringere Verlust- und Risikoaversionen (Cluster 3 und 4).



Je höher die Verlust- und Risikoaversionen sind, desto bedeutender ist das Risikomanagement, also die Definition, Messung und Steuerung der Risiken bei der Kapitalanlage. Da der Großteil der Anleger sowohl eine hohe Risikoaversion als auch eine hohe Verlustaversion aufweist, spielt das Risikomanagement eine wichtige Rolle im Kapitalanlageprozess.

Risiko im Kapitalanlagebereich bezeichnet allgemein die Unsicherheit bezüglich zukünftiger Finanzergebnisse innerhalb eines vorgegebenen Zeitrahmens, wobei die Unsicherheit durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung spezifiziert werden kann. In der Literatur werden verschiedene Risikomaße diskutiert, die die Unsicherheit in einer einzigen Kennzahl verdichten. Prominente Risikomaße sind sowohl die zentralen Momente, beispielsweise die Varianz und Schiefe, als auch die Lower Partial Moments, beispielsweise die Semivarianz (vgl. Anhang II). Gemein haben alle Risikomaße, dass sie eine Abweichung von einem Lageparameter oder einem Zielwert messen, sich somit auf einen Ergebnisbereich beziehen und nicht auf einzelne Punkte der Ergebnisverteilung.³ In dieser Studie zur Prognose des Risikos konzentrieren wir uns – wie in der Kapitalmarkttheorie üblich – auf die Standardabweichung der Renditen als Risikomaß.

2.2 Risikoschätzung und Implikationen für die Portfolioallokation

Das wahre Risiko eines Wertpapiers ist nicht bekannt, es kann lediglich auf Basis historischer Rendite-, Faktor- oder Optionsdaten geschätzt werden. Chopra / Ziemba (1993) zeigen, dass sich Risiken auf Basis historischer Renditen mit kleineren Fehlern schätzen lassen als Renditen. Deutlich wird dies, wenn man die Schätzwerte und ihre Standardfehler betrachtet.

Der beste Schätzer für den Renditemittelwert der unbekanntes Grundgesamtheit ergibt sich aus dem Mittelwert aller beobachteten (unabhängig, identisch und normalverteilten) Renditen r_t der Stichprobe:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^n r_t.$$

T gibt den Beobachtungszeitraum an. Es lässt sich zeigen, dass diese Schätzung im Durchschnitt den wahren Mittelwert trifft. Der Standardfehler beschreibt die Streuung des Schätzers um den wahren Parameterwert und ist damit ein Maß für die Güte der Schätzung. Die Güte des Schätzers wird durch seine Varianz bestimmt:

$$\text{var}(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{T}.$$

Deutlich wird, dass der Standardfehler als Wurzel der Varianz nicht von der Datenfrequenz abhängt.⁴ Eine Verlängerung des Betrachtungszeitraums verringert aber den Standardfehler und verbessert somit die Renditeschätzung.

Das Risiko als Varianz der Renditen ermittelt sich aus folgender Formel:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T - \Delta t} \sum_{t=1}^n (r_t - \hat{\mu} \Delta t)^2.$$

wobei $T = n * \Delta t$ gilt. Δt gibt dabei die Periodenlänge, also die Datenfrequenz, an. Die Güte des Schätzers lässt sich durch seine Varianz messen:

$$\text{var}(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\hat{\sigma}^4}{\left(\frac{T}{\Delta t}\right) - 1}.$$

³ Der Value at Risk hingegen beschreibt nur einen Punkt der Ergebnisverteilung. Zwar erfüllt er nicht die Anforderungen an ein kohärentes Risikomaß, vgl. Artzner / Delbaen / Eber / Heath (1999), dennoch ist er in der Praxis weitverbreitet. Ein Einsatz mit Blick auf Verluste, die nicht überschritten werden sollen, ist demnach zweckmäßig (vgl. Abschnitt 3).

⁴ Vgl. Campbell / Lo / MacKinlay (1997), S. 361 – 369.

Die Güte der Varianzschätzung nimmt mit der Länge des Betrachtungszeitraums zu und erhöht sich im Gegensatz zur Renditeschätzung auch mit der Datenfrequenz (vgl. hierzu den Anhang III i und III ii).⁵

Zur Veranschaulichung der Güte der Rendite- und Risikoschätzer betrachten wir die Konfidenzintervalle für normalverteilte Renditen mit Erwartungswert 10 % und Volatilität 40 % für verschiedene Datenfrequenzen.

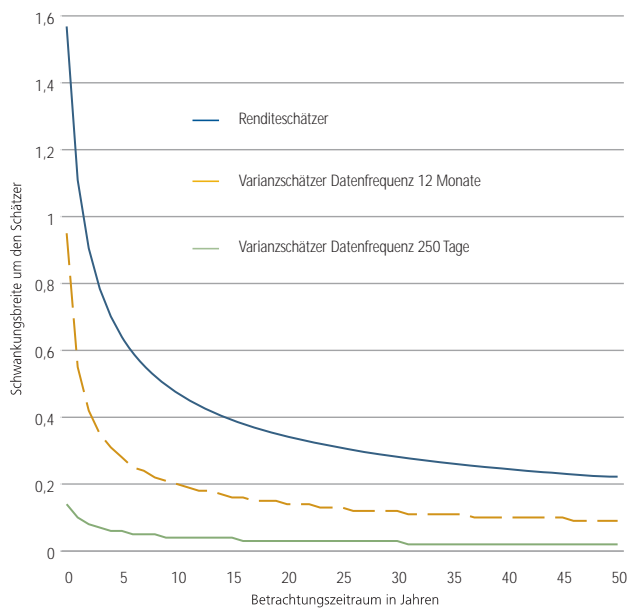


Abbildung 2
Breite des 95 % Konfidenzintervalls für Rendite- und Varianzschätzung

Aus Abbildung 2 ist ersichtlich, dass sich die Schätzer mit steigender Länge der Beobachtungszeiträume verbessern. Die Varianzschätzung verbessert sich ebenfalls mit höherer Frequenz.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Schätzung der Renditen auf Basis der historischen Beobachtungen wesentlich ungenauer ist als die Schätzung der Varianz. Anzumerken ist, dass eine Schätzung auf Basis historischer Renditen grundsätzlich problematisch ist, da für viele Unternehmen keine hinreichend langen Kurshistorien existieren und die Zeitreihen häufig Strukturbrüche aufweisen. Zudem können kleine Fehleinschätzungen der Rendite zu erheblichen Verzerrungen bei den über eine Portfoliooptimierung ermittelten Portfoliogewichten führen. Schätzfehler bei den Varianzen und Korrelationen hingegen fallen weit weniger ins Gewicht (siehe dazu den Anhang III iii).

2.3 Prognose der Parameter

Neben der größeren Schätzgenauigkeit weisen Varianzen auch eine größere Konstanz im Zeitablauf auf. Renditen sind dagegen im Zeitablauf wesentlich instabiler.⁶ Einige empirische Studien, etwa von Jorion (1985), Sharpe (1987) und Stucki (1994), vergleichen dazu die Genauigkeit von Prognoseverfahren für die Renditen und Standardabweichungen aus ex post beobachteten historischen Renditezeitreihen.⁷

⁵ Vgl. Kempf / Memmel (2002), S. 901–903.

⁶ Vgl. Petersmeier / Poddig (2003), S. 363.

⁷ Vgl. Dichtl (2001), S. 138 ff.

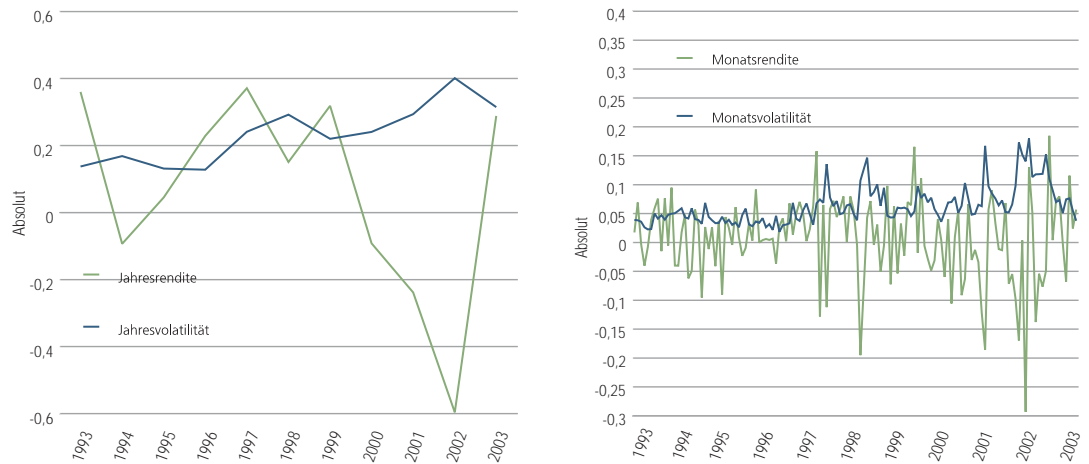
Stucki (1994) untersucht die Stabilität von Renditen und Varianzen für sieben verschiedene Aktienmärkte, darunter den DAX, den S&P 500 und den FTSE 100, im Zeitraum von 1979 bis 1993. Vergleicht man die durchschnittlichen historischen Renditen bzw. Varianzen der letzten fünf Jahre mit den tatsächlich realisierten Jahres- und Monatsrenditen bzw. Varianzen auf diesen Märkten, so stellt man folgendes fest: Die Schwankung der realisierten Werte um den historischen Wert ist bei den Renditen erheblich größer als bei den Varianzen. Die Unsicherheit in Bezug auf zukünftige Renditen ist also höher.⁸ Abbildung 3 verdeutlicht dies für jährliche und monatliche Dax-Renditen und Volatilitäten.

Auf der linken Seite der Abbildung 3 ist ersichtlich, dass die Jahresrenditezeitreihe stärker über die Zeit schwankt als die aus den historischen Tagesrenditen errechnete Volatilität. In der rechten Hälfte zeigt sich der gleiche Effekt für Monatswerte. Tabelle 1 fasst den Zusammenhang in Kennzahlen zusammen. Man erkennt, dass die Standardabweichung der Renditen (Spalte 3) als Maß für die Schwankungsbreite um den Mittelwert weitaus größer ist als die Standardabweichung der Volatilität (Spalte 5).

Abbildung 3
Renditen und Volatilitäten
für den DAX vom 01.01.1993
bis 31.12.2003

Links: DAX Jahresrenditen
bzw. -volatilitäten

Rechts: DAX Monatsrenditen
bzw. -volatilitäten



DAX 01.01.1993 – 31.12.2003	Rendite		Volatilität	
	Mittelwert	Standardabweichung	Mittelwert	Standardabweichung
Absolute Jahreswerte	6,75%	30,14%	23,35%	8,77%
Absolute Monatswerte	0,56%	7,21%	6,36%	3,31%
Absolute Tageswerte	0,03%	1,54%	1,09%	1,08%

Tabelle 1: Schwankung der Rendite und der Volatilität für den DAX vom 01.01.1993 bis 31.12.2003

⁸ Stucki (1994) zeigt, dass für die Varianzen die Rangreihenfolge der Anlagemöglichkeiten aus historischen Daten zu mehr als 68 % erhalten bleibt, während dies für Renditen nicht signifikant von einem Münzwurf verschieden ist. Die Betrachtung der Rangreihenfolge ist gerade in der Portfoliooptimierung von Bedeutung, da vor allem der relative Vergleich der Anlagemöglichkeiten miteinander von Bedeutung ist. Vgl. S. 511 – 513.

Für die Prognose der Parameter der Wahrscheinlichkeitsverteilung der zukünftigen Renditen ist entscheidend, welche Aussagekraft die historischen Parameter für die zukünftigen Parameter besitzen. Um eine Vorstellung von der Entwicklung von Varianzen und Renditen im Zeitablauf zu erhalten, betrachten wir nachfolgend die täglichen Renditen und Varianzen, die – wie in der Literatur üblich⁹ – durch die quadrierten Tagesrenditen für den DAX im Zeitraum vom 1. Januar 1990 bis 31. August 2001 approximiert werden (siehe Abbildung 4).

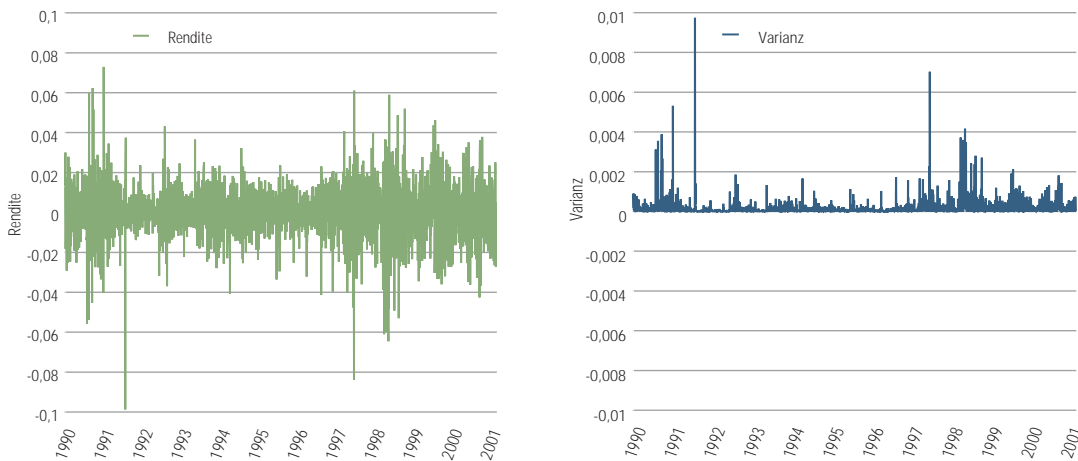


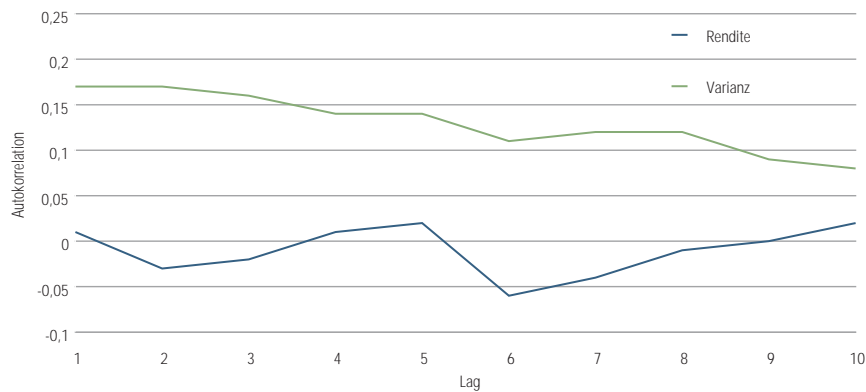
Abbildung 4:
Rendite und Varianz für
den DAX vom 01.01.1990
bis 31.08.2001

Links: Renditen im DAX
Rechts: Varianzen im DAX

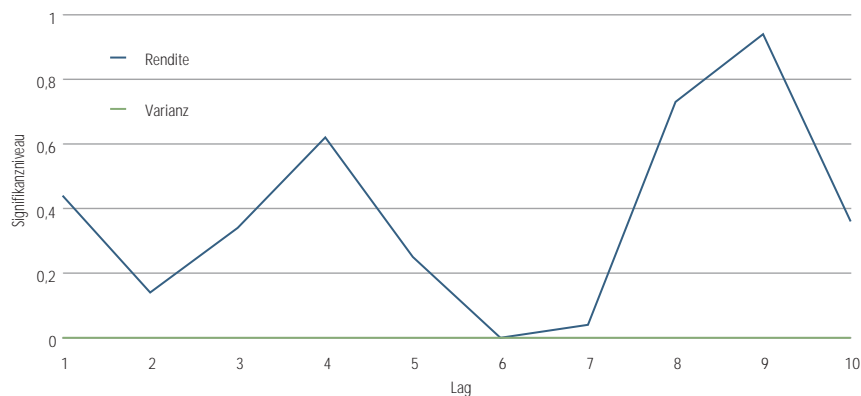
⁹ Vgl. z. B. Poon / Granger (2003), S. 492.

In Abbildung 5 werden die Autokorrelationen der historischen Varianzen (Renditen) für verschiedene Lags (Zeitabstände / Verzögerungen) dargestellt. Die Autokorrelation der Varianzen mit Lag 1 z. B. misst die Korrelation der Varianz am Tag $t = 0$ mit der Vortagesvarianz. Für den Lag 1 beträgt sie in diesem Fall 0,17. Mit zunehmenden Lag nimmt sie ab, bleibt aber über den Lag 10 hinaus hochsignifikant (siehe dazu die Signifikanzen im rechten Teil der Abbildung 5). Bei den Renditen besteht dagegen nur für den Lag 6 eine signifikant negative Autokorrelation in Höhe von -0,06 (vgl. hierzu die genauen Werte im Anhang III iv).¹⁰

Abbildung 5
Autokorrelation von Renditen
und Varianzen und ihre
Signifikanzniveaus für den
DAX vom 01.01.1990
bis 31.08.2001



Signifikanzniveaus
der Autokorrelation
im DAX



Als Ergebnis dieses Abschnittes ergibt sich: Die Renditezeitreihen sind zeitlich instabiler als die Varianzzeitreihen. Die Autokorrelationen für Renditen sind nahe bei null und i. d. R. nicht signifikant. Die Autokorrelationen für die Varianzen sind hingegen positiv und hochsignifikant. Daraus lässt sich ableiten, dass sich Risiken erheblich besser prognostizieren lassen als Renditen. „... Dies ist ein augenscheinlicher Hinweis, dass die Prognose des Risikos (anhand historischer Volatilitäten; Anm. d. Verf.) zuverlässiger ist als diejenige der zukünftigen Renditen (anhand historischer Renditen; Anm. d. Verf.)“.¹¹

¹⁰ Litterman / Winkelmann (1998), S. 6 – 12, zeigen für sehr kurze Datenfrequenzen anhand einer Monte-Carlo-Simulation, dass die empirisch beobachteten Aktienrenditen autokorreliert und nicht voneinander unabhängig und gleich verteilt (i. i. d.) sind.

¹¹ Vgl. Stucki, 1994, S. 511.

2.4 Zusammenhang von Renditen und Volatilitätsänderungen

Der stabile und vielfach in der Literatur dokumentierte negative Zusammenhang zwischen Renditen und Volatilitätsänderungen ist ein weiterer empirisch beobachteter Zusammenhang, der im Rahmen von Portfolio-Management-Strategien genutzt werden könnte.¹² Voraussetzung dafür wäre, dass sich bei der Risikoprognose auch die Volatilitätsänderungen vorhersagen ließen, die negativ mit den Renditen korrelieren. Diese negative Korrelation zwischen Renditen und Volatilitätsänderungen wird in Tabelle 2 für den DAX im Zeitintervall 1993 bis 2003 verdeutlicht.

Der negative Zusammenhang zwischen Renditen und Volatilitätsänderungen wird in der Literatur häufig mit dem Leverage-Effekt begründet.¹³ Fällt der Marktwert des Eigenkapitals, so erhöht sich der Verschuldungsgrad eines Unternehmens. Bei gleichbleibender Volatilität des Gesamtunternehmenswertes führt diese Veränderung zu einem Anstieg der Eigenkapitalvolatilität und vice versa. Unterstellt man hingegen, dass sich die Risikoprämie im Zeitablauf ändern kann,¹⁴ ergibt sich ein alternativer Zusammenhang. Werden Risiken entlohnt, folgt auf eine erwartete Ausweitung des Risikos eine Steigerung der zukünftigen Rendite. Daraus resultiert eine unmittelbare Reduktion des Aktienpreises und damit der aktuellen Rendite. Während also im ersten Fall auf einen Renditeschock eine Anpassung der Volatilität folgt, ergibt sich im letzteren eine umgekehrte kausale Verkettung.¹⁵

Figlewski / Wang (2000) zeigen schließlich, dass bei fallenden Kursen der Volatilitätsanstieg absolut größer ausfällt als der Volatilitätsrückgang bei steigenden Kursen. Diese Beobachtung gilt für Monats- und Tageswerte (siehe Tabelle 2). Die Autoren folgern daraus einen „down market effect“.¹⁶

DAX 01.01.1993 – 31.12.2003	Monatsbasis (VDAX)	Tagesbasis (VDAX)
Gesamtmarkt	-0,621	-0,597
Up-Markets	-0,037	-0,537
Down-Markets	-0,766	-0,665

Tabelle 2: Korrelation der Renditen und der Volatilitätsrenditen für den DAX vom 01.01.1993 bis 31.12.2003¹⁷

Die bisherigen theoretischen Überlegungen lassen sich wie folgt zusammenfassen: Schätzfehler sind bei der Schätzung von Risiken weitaus geringer als bei Renditen (Abschnitt 2.2). Zudem sind Risiken im Zeitablauf stabiler und lassen sich demzufolge besser prognostizieren (Abschnitt 2.3). Zwischen Renditen und Volatilitätsänderungen lässt sich eine signifikant negative Korrelation beobachten (Abschnitt 2.4).

¹² Vgl. Black (1976), Christie (1982), Schwert (1989), Glosten / Jagannathan / Runkle (1993) und Braun / Nelson / Sunier (1995).

¹³ Vgl. Black (1976), Christie (1982), Schwert (1989).

¹⁴ Vgl. Pindyck (1984), French / Schwert / Stambaugh (1987) und Campbell / Hentschel (1992).

¹⁵ Zur Diskussion des Phänomens vgl. Bekaert / Wu (2000).

¹⁶ Vgl. Figlewski / Wang (2000), S. 23.

¹⁷ Up- und Down-Markets ergeben sich für die Autoren, wenn drei aufeinanderfolgende Perioden positive bzw. negative Renditen aufweisen.

3 Risikoprognose

3.1 Modelle der Risikoprognose

Bei aktiven Risikomanagementstrategien besteht die Kernkompetenz des Asset Managers in der Risikoprognose. In Abschnitt 2.3 wurde bereits gezeigt, dass Risiken einfacher zu prognostizieren sind als Renditen. In diesem Abschnitt stellen wir einfach umsetzbare Verfahren zur Prognose der Varianz vor. In der Praxis lassen sie sich erweitern sowie miteinander kombinieren. Die tatsächlichen Risikoprognosen von Asset Managern sollten deutlich besser als diese „einfachen“ Prognosen sein.

Die nachfolgenden Ansätze arbeiten mit Tagesrenditen. Als Approximation für das Risiko werden üblicherweise die quadrierten Renditen verwendet.¹⁸ Grundsätzlich lassen sich die vorgestellten Ansätze zur Vorhersage des Risikos über eine längere Haltedauer erweitern. Allerdings ist dabei zu berücksichtigen, dass die Vorhersagekraft mit steigender Länge des Vorhersagezeitraums für die ökonometrischen Modelle abnimmt, da die Autokorrelation der Varianzen von Tag zu Tag kontinuierlich sinkt (siehe Abbildung 5 sowie Tabelle 8 im Anhang).

- Der **Smoothing-Ansatz (Glättungsansatz)** ist ein erstes, einfaches Verfahren zur Vorhersage der zukünftigen Volatilität aus den historischen Beobachtungen. Die Varianzprognose wird als gewichtete Summe der historischen Werte berechnet. Dabei kann der Anwender die Anzahl der historischen Werte variieren. Ein Vorteil ist, dass keine Annahmen über die Entwicklung der Varianz im Zeitablauf getroffen werden müssen. Zur Bestimmung der Prognose genügt die Kenntnis der vergangenen Beobachtungen. Dies ist insbesondere bei großen Datenmengen von Vorteil. Beim Exponential Smoothing nimmt die Gewichtung der einzelnen historischen Varianzen für die Prognose exponentiell ab, je länger sie zurückliegen.¹⁹
- Die von Box und Jenkins entwickelten **ARMA-Modelle** (Autoregressive-Moving-Average-Modelle) unterstellen, dass sich die Varianz aus einem zu schätzenden Mittelwert zuzüglich der historischen Varianzen bzw. der historischen Zufallsfehler ergibt. Das autoregressive Verfahren ($AR(k)$ -Prozess)²⁰ nutzt nur historische Varianzen einer bestimmten Anzahl (k) Vorperioden zur Prognose. Im Moving-Average-Verfahren ($MA(k)$ -Prozess) basiert die Prognose dagegen auf den historischen Fehlertermen der k zurückliegenden Perioden. Die Fehlerterme ergeben sich dabei aus der Differenz zwischen der historisch prognostizierten und der tatsächlichen Varianz. Der $ARMA(p, q)$ -Prozess schließlich bildet eine Kombination aus den beiden vorherigen Modellen.
- Bei **ARCH-Modellen** (Autoregressive-Conditional-Heteroscedasticity-Modellen) und **GARCH-Modellen** (Generalized-ARCH-Modellen) wird die Varianz nicht direkt, sondern in Kombination mit den Renditen geschätzt bzw. prognostiziert.²¹ Das $ARCH(p, q)$ -Modell berücksichtigt zur Renditeprognose die p historischen Renditen sowie zur Risikoprognose die q historischen und quadrierten Fehlerterme des Renditeprozesses. Im $GARCH(p, q, r)$ -Ansatz, als Verallgemeinerung des $ARCH(p, q)$ -Prozesses, wird die Risikoprognose zudem aus den r historischen Varianzen ermittelt. Dieser Ansatz eignet sich für die Abbildung des sogenannten Volatility Clustering, wenn also zeitliche Phasen mit hoher und mit niedriger Varianz existieren.

¹⁸ Vgl. Poon / Granger (2003), S. 492.

¹⁹ Es existieren weitere Smoothing-Modelle. Diese unterscheiden sich lediglich in der Gewichtung der historischen Werte. Neben den dargestellten Verfahren ist beispielsweise Holt-Winters-Smoothing ein häufig verwendeter Ansatz. Dieser eignet sich besonders, wenn ein Trend sowie Saisonalität der Zeitreihe unterstellt wird. Vgl. zum Überblick Newbold / Granger (1974) sowie die Originalartikel von Holt (1957) und Winters (1960).

²⁰ Ein Zufalls- bzw. stochastischer Prozess $\{X_t\}$ ist eine Gruppe von Zufallsvariablen x_1, x_2, x_3, \dots , die der Zeit nach angeordnet werden. Ein in t beobachteter Wert x_t ist demnach eine Realisation dieses Prozesses. Vgl. Gujarati (2003), S. 796.

²¹ Zur Signifikanz des Tests auf ARCH-Effekte von Engle für die Varianz vgl. im Anhang IV iii i).

Im linken Teil der Abbildung 6 wird die Risikoprognose mit einem GARCH(2,2,2)-Prozess dargestellt (niedrige Schwankung) und mit den tatsächlichen Varianzen (hohe Schwankung) verglichen. Beim GARCH(2,2,2) wird die prognostizierte Rendite aus den Renditen der beiden Vorperioden bestimmt. Die Risikoprognose ergibt sich aus den Volatilitäten der beiden Vorperioden und den quadrierten Fehlertermen des Renditeprozesses der beiden Vorperioden. Im rechten Teil befinden sich die quadrierten Abweichungen. Es existieren zahlreiche Erweiterungen von ARCH- bzw. GARCH-Ansätzen (EGARCH, FIEGARCH, IGARCH, TGARCH, GJR-GARCH, RS-GARCH, etc.).²² Beim sogenannten Exponential GARCH (EGARCH) wird beispielsweise die Beobachtung ausgenutzt, dass negative Fehlerterme eine höhere Autokorrelation aufweisen, was die Prognoseergebnisse weiter verbessert.

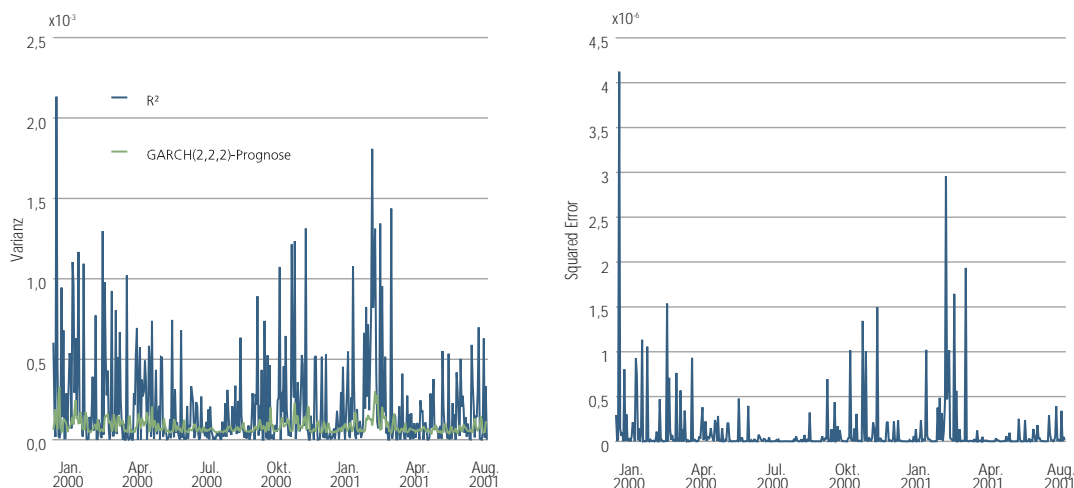


Abbildung 6:
Prognoseergebnisse
des GARCH(2,2,2)-Verfahrens
für den DAX vom 01.01.2000
bis 30.08.2001

Links: Varianz Prognose
mit GARCH(2,2,2)-Verfahren
Rechts: Squared Error der
Prognose

- Ein weiterer Ansatz aus dem Bereich der Zeitreihenanalyse ist die Stochastic Volatility. Hierbei wird die Varianz ebenfalls in Kombination mit den Renditen modelliert. Allerdings ergibt sie sich nicht durch die bedingte Varianz der Renditen, sondern direkt als stochastischer Prozess.
- Volatilitätsprognosen können auch mit künstlichen neuronalen Netzen erzeugt werden.²³ Diese an der natürlichen Struktur des Nervensystems bzw. des menschlichen Gehirns ausgerichteten Optimierungsstrukturen erlauben es, jedweden funktionalen Zusammenhang zu approximieren.²⁴ Weitere Vorteile sind, dass eine große Anzahl unabhängiger Variablen integriert werden kann und ex ante kein funktionaler Zusammenhang unterstellt werden muss. Der besonders hohe Rechenaufwand, fehlende Regeln für die Gestaltung der Netzwerkarchitektur sowie der Black-Box-Charakter erklären die relative Exotik dieser Methode. Eine nähere Betrachtung im Rahmen dieser Studie unterbleibt deshalb.
- Ein alternativer Ansatz zur Schätzung des Risikos ist das Extrahieren der impliziten Volatilitäten aus beobachteten Optionspreisen. Dabei wird von der Gültigkeit eines bestimmten Optionspreismodells, beispielsweise des Black-Scholes-Modells, ausgegangen. Liegen alle anderen Bewertungsparameter vor, wird die Volatilität im Optionspreismodell iterativ so lange verändert, bis Modell- und Marktpreis approximativ übereinstimmen. Die so berechnete implizite Volatilität drückt die Erwartung der Marktteilnehmer über das zukünftige Risiko aus. Bei der Ermittlung der impliziten Volatilitäten können allerdings systematische Fehler auftreten. Bollerslev / Zhou (2006) zeigen eine systematische Überschätzung der realisierten durch die impliziten Volatilitäten auf. Zur Verbesserung der Ergebnisse werden daher in der Praxis häufig Adjustierungen bei der Prognose vorgenommen. Eine Korrektur erfolgt über die Ermittlung der historischen Abweichungen der impliziten Volatilität von den realisierten Beobachtungen.

²² Vgl. Poon / Granger (2003), S. 484 f. und 495.

²³ Vgl. hierzu auch Hamid / Iqbal (2004).

²⁴ Vgl. Hornik / Stinchcombe / White (1989), S. 359 – 366.

3.2 Vergleich der Ergebnisse

Zur Beurteilung der vorgestellten Ansätze zur Risikoprognose können grundsätzlich verschiedene Kennzahlen herangezogen werden.²⁵ Nachfolgend verwenden wir die in Theorie und Praxis am häufigsten gebrauchte Kennzahl, den mittleren quadrierten Fehler (Mean Squared Error, MSE). Dabei wird die Summe der quadrierten Abweichungen von Prognose und täglicher Varianz des DAX über den Beobachtungszeitraum vom 1. Januar 2000 bis zum 31. August 2001²⁶ gemittelt und aus diesem Mittelwert die Wurzel gezogen. Je kleiner der MSE, desto besser ist die Risikoprognose und damit das Modell. In Tabelle 3 werden die verschiedenen Prognoseansätze verglichen und eine Rangfolge erstellt. Der Ansatz der bereinigten impliziten Volatilitätsschätzung schneidet am besten ab, gefolgt vom EGARCH-Verfahren. Am schlechtesten schneidet die historische Volatilitätsprognose ab.²⁷

Beim Vergleich dieser Werte mit der Prognosegüte der Renditeschätzung der Verfahren in Tabelle 4 wird nochmals deutlich: Risiken lassen sich erheblich besser als Renditen prognostizieren.²⁸ Grinold / Kahn (2000) schlagen als Maß für die Prognosegüte die Korrelation zwischen Prognose und Realisation vor und bezeichnen diese Korrelation als Information Coefficient. Auch diese Kennzahl kann den Unterschied in der Güte der Rendite- und Risikoprososen deutlich machen. Während bei der Varianzschätzung hervorragende Werte von bis zu 0,35 erreicht werden, ist die Korrelation zwischen Renditeprognose und -realisation nicht signifikant von null verschieden (vgl. Tabelle 3 und Tabelle 4, letzte Spalte).

Schätzmethode	Prognosefehler (MSE)	Rang	Faktor	Korrelation zwischen Prognose und Realisation
Optionspreistheoretisch bereinigt	$6,50 \cdot 10^{-8}$	1	1,00	0,355***
EGARCH(0,1,1)	$8,61 \cdot 10^{-8}$	2	1,32	0,253***
Optionspreistheoretisch	$8,96 \cdot 10^{-8}$	3	1,38	0,240***
ARCH(2,2)	$9,07 \cdot 10^{-8}$	4	1,40	0,182***
Exponential Smoothing	$9,08 \cdot 10^{-8}$	5	1,40	0,238***
MA(4)	$9,09 \cdot 10^{-8}$	6	1,40	0,178***
ARMA(3,3)	$9,89 \cdot 10^{-8}$	7	1,52	0,195***
AR(6)	$1,00 \cdot 10^{-7}$	8	1,54	0,197***
GARCH(2,2,2)	$1,06 \cdot 10^{-7}$	9	1,63	0,160***
Stochastic Volatility	$1,14 \cdot 10^{-7}$	10	1,76	0,231***
Historisch	$1,37 \cdot 10^{-7}$	11	2,11	0,101**

Tabelle 3: Prognosegüte der vorgestellten Verfahren bei der Varianzschätzung²⁹

Schätzmethode	Prognosefehler (MSE)	Rang	Faktor	Korrelation zwischen Prognose und Realisation
Exponential Smoothing	$1,29 \cdot 10^{-7}$	1	1,00	-0,079*
ARMA(3,3)	$1,30 \cdot 10^{-7}$	2	1,00	-0,009
MA(4)	$1,38 \cdot 10^{-7}$	3	1,07	0,014
Historisch	$1,67 \cdot 10^{-7}$	4	1,29	-0,014
AR(6)	$4,06 \cdot 10^{-7}$	5	3,14	-0,072

Tabelle 4: Prognosegüte der vorgestellten Verfahren bei der Rendite-Schätzung³⁰

²⁵ Vgl. Gospodinov/Gavala/Jiang (2006).

²⁶ Dieser Zeitraum wurde wegen der Verfügbarkeit der Rendite- und Optionsdaten gewählt, sodass eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse verschiedener Methoden gewährleistet ist. Die Wahl des zugrunde gelegten Zeitraums hat keinen Einfluss auf die Ergebnisse.

²⁷ Bei der Interpretation der Werte ist zu berücksichtigen, dass die Ergebnisse sensibel auf Ausreißer reagieren und stark von der Wahl des Untersuchungszeitraums abhängen können. In dem vorliegenden Fall ist zudem zu berücksichtigen, dass durch die Approximierung der tatsächlichen Varianz durch quadrierte Renditen eine systematische Überschätzung des tatsächlichen MSE erfolgt, der allein im Bereinigungsverfahren der Optionsmethode korrigiert wird.

²⁸ Nicht alle Verfahren zur Risikoprognose liefern auch eine entsprechende Renditeprognose. Die ARCH-Varianten und die optionspreistheoretischen Verfahren sind dementsprechend in Tabelle 4 nicht berücksichtigt.

²⁹ Die Signifikanz der Korrelationskoeffizienten für die Risikoschätzungen ist entsprechend den üblichen Niveaus angegeben: 99%-Konfidenzintervall (***), 95%-Konfidenzintervall (**), 90%-Konfidenzintervall (*).

³⁰ Siehe Fußnote 29.

4 Risikoprognose in der Praxis

In diesem Kapitel zeigen wir anhand einer auf dem Value at Risk basierenden Wertsicherungsstrategie, wie sich die Erkenntnisse aus den vorherigen Abschnitten für den Anleger gewinnbringend nutzen lassen. Wertsicherungskonzepte wie die von Black / Jones (1987) entwickelte Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI) erfreuen sich bedingt durch die möglichen hohen Verluste bei benchmarkbezogenen Kapitalanlagen zunehmender Beliebtheit. Wertsicherungsstrategien werden von Anlegern bei mittlerer bis hoher Verlustaversion (siehe Abbildung 1 in Kapitel 2) eingesetzt.

4.1 Constant-Proportion-Portfolio-Insurance-(CPPI)-Strategie

CPPI-Strategien zählen zu den dynamischen, regelgebundenen und prozyklischen Anlagekonzepten. Der Anleger muss zunächst einen Mindestwert, den „Floor“, des Portfolios bestimmen, der zu keinem Anlagezeitpunkt unterschritten werden darf. Der „Cushion“ (Puffer) bezeichnet die Differenz aus aktuellem Vermögen und Floor. Das Produkt aus dem Cushion und dem Multiplikator determiniert das „Exposure“, also den risikobehafteten Portfolioanteil (z. B. der Aktienanteil). Der Geldmarktanteil wird aus der Differenz von Vermögen und Exposure bestimmt. Auf Basis dieser Vorgaben kann die CPPI-Strategie täglich gesteuert werden. Steigt der Wert des risikobehafteten Portfolioanteils, so wird dieser prozyklisch erhöht. Bei fallenden Kursen wird das Exposure zurückgefahren und dafür der Geldmarktanteil erhöht. Die Höhe des Multiplikators determiniert die Risikobereitschaft. Typischerweise orientieren sich die Anleger am maximalen Übernachtisiko des Exposures. Beträgt dieses beispielsweise 10%, so ergibt sich ein Multiplikator von 10 ($= 1 / 10\%$). Wird das Übernachtisiko angemessen hoch und der Multiplikator entsprechend gering gewählt, so kann die CPPI-Strategie nahezu niemals scheitern. Die Strategie ist dann gescheitert, wenn der Vermögenswert unter den Floor (Mindestsicherungsniveau) fällt. Nachteil des fixen Multiplikators ist aber, dass dieser häufig sehr niedrig ist und damit Renditepotenzial „verschenkt“ wird.

Die Bestimmung des Multiplikators über den Value at Risk (VaR) stellt einen alternativen Ansatz dar. Der Value at Risk bezeichnet denjenigen Verlust, der nach Ablauf einer vorgegebenen Haltedauer, H , nur mit einer bestimmten, geringen Wahrscheinlichkeit, p , überschritten wird. Zusätzlich muss der Anleger auch das Berechnungsverfahren bestimmen. Bei linearen Positionen wie Aktien wird der VaR gewöhnlich nach der Kovarianz-Methode geschätzt, die eine Normalverteilung der Renditen unterstellt. Der VaR als Renditeperzentil ergibt sich aus dem Mittelwert, μ , und der Standardabweichung, σ , der historischen Renditen. Der als positiver Wert definierte VaR ist dann:

$$\text{VaR} = -(\mu - L(p)\sigma).$$

$L(p)$ bezeichnet das Perzentil der Standardnormalverteilung und wird über die Vorgabe von p bestimmt. Es beträgt für $p = 5\%$ beispielsweise -1,64. Der Multiplikator ergibt sich nun als $M = \frac{1}{\text{VaR}}$. Da der VaR täglich neu auf Basis der historischen Werte berechnet wird, schwankt auch der Multiplikator. Typischerweise werden bei einer CPPI-Strategie ein sehr geringes p von beispielsweise 0,5% sowie eine Haltedauer von $H = 10$ Tagen gewählt. Im Durchschnitt ergibt sich aus dieser Parameterkonstellation ein deutlich höherer Multiplikator als bei einem Übernachtverlust von beispielsweise 10%. Der Investor kann somit stärker in dem Exposure investieren und an den Renditechancen partizipieren. Die Strategie scheitert häufiger als bei konstantem Exposure, wobei die Wahrscheinlichkeit mit 0,5% auf Basis einer zehntägigen Haltedauer sehr gering ist.

Eine Risikoprognose für σ kann nun im Rahmen der Value-at-Risk-Steuerung zum Einsatz kommen. Im nächsten Abschnitt verdeutlichen wir anhand einer Simulation, welche Vorteile eine solche Risikoprognose bei einer CPPI-Strategie besitzen kann.

4.2 Risikoprognosen und Simulationsaufbau

Ein Problem einer auf ein Jahr ausgerichteten **CPPI-Strategie** kann sein, dass bei starken Abwärtsbewegungen des Marktes prozyklisch und damit zu spät aus der risikobehafteten Anlage in den Geldmarkt umgeschichtet wird. Dadurch wird unterjährig das vorhandene Risikokapital aufgezehrt. Die Strategie kann dann an später im Jahr einsetzenden Aufschwungphasen nicht mehr partizipieren, sondern allenfalls die Geldmarktverzinsung generieren. Gelingt es, das ansteigende Risiko frühzeitig und genau zu prognostizieren, so kann einem solchen Ergebnis vorgebeugt werden. In der nachfolgenden Simulation vergleichen wir eine auf dem Value-at-Risk-Ansatz basierende CPPI-Strategie mit und ohne Risikoprognose. Dabei wird der VaR für ein Konfidenzniveau von 99,5% und eine zehntägige Haltedauer bestimmt. Der Floor wird auf 95% des Jahresanfangsvermögens festgesetzt.

Im ersten Schritt werden 5.000 Rendite-Zeitreihen (Jahre) inklusive jeweils 250 Volatilitäten simuliert. Dabei bestimmt sich die Rendite aus einem Random-Walk-Prozess mit Drift. Die Volatilität ergibt sich ebenfalls aus einer Konstanten, die um den Absolutbetrag des standardnormalverteilten Zufallsfehlers des Renditeprozesses ergänzt wird. Anschließend wird eine Prognose der Volatilität simuliert, deren Zufallsfehler eine Korrelation von 0,3 aufweisen. Diese Korrelation entspricht in etwa der historisch ermittelten Korrelation aus Abschnitt 3.2.

Auf Basis dieser Zeitreihen können nun die folgenden zwei CPPI-Strategien angewandt werden. Das Basisszenario ist eine einfache historische Risikoprognose. Zum aktuellen Zeitpunkt t ergibt sich das Exposure aus dem VaR in t . Damit wird unterstellt, dass die heutige Volatilität die Prognose für die Volatilität von morgen ist. Im zweiten Fall erfolgt eine Volatilitäts- und damit VaR-Prognose. Bei jeder Umschichtung fallen Transaktionskosten in Höhe von 0,25% vom Nominalwert an. Um Transaktionskosten zu vermeiden, wird bei allen Strategien nur dann umgeschichtet, wenn das Soll-Exposure vom Ist-Exposure um mindestens 5% abweicht.

Aus Tabelle 5 ist ersichtlich, dass durch eine Risikoprognose das Risiko eines Investments erheblich reduziert werden kann. Die Standardabweichung der möglichen Endvermögen sinkt deutlich um über 1% (Spalte 2). Der Prognosefehler von $2,10 \cdot 10^{-7}$ (Spalte 3) entspricht in etwa den Werten der in Abschnitt 3.2 vorgestellten Risikoprognoseverfahren. Außerdem lässt sich einer Verletzung des Floors deutlich vorbeugen. Die Verletzungen dieser Wertuntergrenze können von 78 Fällen auf einen reduziert werden (Spalte 4). Die Risikoprognose generiert einen zusätzlichen Absicherungseffekt. In über 52% der 5.000 Simulationen liegt das CPPI-Ergebnis im Basisszenario nach einem Jahr unter der Anfangsinvestition, während die Renditeprognose diesen Wert auf ca. 43% reduziert. Die vierte Spalte der Tabelle 5 verdeutlicht diesen Sachverhalt.

In der letzten Spalte ist der Mittelwert der beobachteten Renditen der Simulationen abgetragen. Im Vergleich zum Basisszenario steigt das Geldvermögen nach einem Jahr um ca. fünf Basispunkte auf 105,64 (Spalte 6). Dennoch ist dieser Renditeeffekt wie zu erwarten relativ gering und statistisch nicht signifikant.

	Risiko (Std. Dev. des Endvermögens)	Prognosefehler (MSE)	Verletzung des Floors während der Laufzeit (Häufigkeit)	Unterschreitung des Anfangs- vermögens (in %)	Rendite
Basisszenario historisches (CPPI)	13,363%	$3,271 \cdot 10^{-7}$	78	52,22%	5,593%
CPPI mit Volatilitäts- prognose ($p=0,3$)	12,123%	$2,0905 \cdot 10^{-7}$	1	42,80%	5,642%

Tabelle 5: Ergebnisse der Vola-CPPI-Simulation für ein Jahr

In Abbildung 7 sind die Histogrammfunktionen für die beiden Simulationen abgebildet. Es wird deutlich, dass das CPPI mit Risikoprognose zu einer nach rechts verschobenen Verteilung führt. Verletzungen des Floors sind weniger häufig zu beobachten.

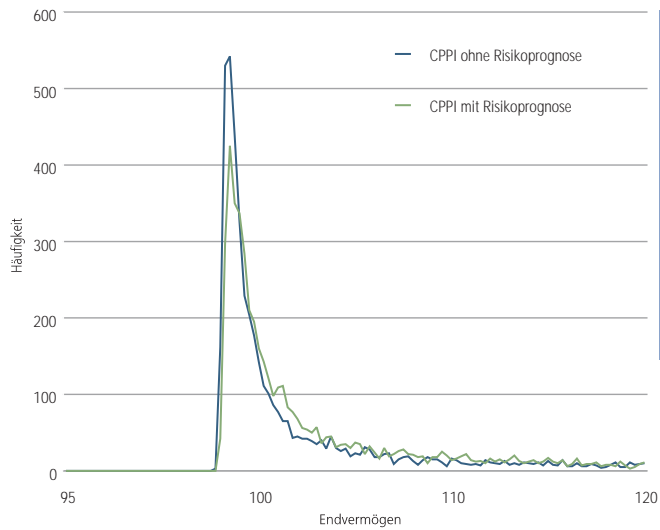


Abbildung 7:
Histogrammfunktionen der
CPPI-Simulation

Eine erfolgreiche Prognose führt demnach zu einem geringeren Risiko, gemessen als Standardabweichung der realisierten Endvermögen, sowie zu einer Verbesserung des Absicherungseffekts. Beides steht im Fokus der eingesetzten CPPI-Strategie.

5 Zusammenfassung und Praxisimplikation

Ziel der vorliegenden Studie ist es, den Mehrwert einer erfolgreichen Risikoprognose im Rahmen von Asset-Management-Strategien aufzuzeigen. Anlagestrategien, bei denen eine aktive Risikoprognose einen Mehrwert erzielen kann, werden als aktive Risiko-Management-Strategien bezeichnet. Der Mehrwert wird durch zwei zentrale Risikoeigenschaften von Wertpapierrenditen generiert. Das Zusammenwirken dieser beiden Eigenschaften bezeichnen wir als Law of Risk Management:

1. Risiken können mit weitaus geringeren Fehlern als Renditen aus den historischen Daten geschätzt werden. Die Genauigkeit der Risikoschätzung nimmt mit der Länge der historischen Untersuchungsperiode und der Erhöhung der Datenfrequenz zu. Die Genauigkeit einer Renditeschätzung ist dagegen von der Datenfrequenz unabhängig.
2. Risiken lassen sich bereits mit einfachen ökonomischen Verfahren weitaus besser prognostizieren als Renditen, da Risiken im Zeitablauf konstanter sind und eine höhere Autokorrelation als Renditen aufweisen.

Anlagestrategien, bei denen die kurzfristige Steuerung des Risikos von großer Bedeutung ist, können von einer Risikoprognose profitieren. Am Beispiel einer auf dem Value-at-Risk-Ansatz basierenden Wertsicherungsstrategie wird der Mehrwert einer erfolgreichen Risikoprognose durch eine deutliche Reduktion des Risikos herausgearbeitet.

- Die Wertsicherungsstrategie mit Risikoprognose führt zu einem geringeren Risiko (gemessen als Standardabweichung) der gesamten Vermögensposition im Vergleich zur Wertsicherung ohne Risikoprognose.
- Zudem wird die Vermögensuntergrenze (Floor) deutlich seltener unterschritten als bei der klassischen Wertsicherungsstrategie.

Neben den zwei oben zusammengefassten Eigenschaften bei der Schätzung und Prognose des Risikos existiert insbesondere in Marktphasen fallender Kurse eine signifikante, stark negative Korrelation zwischen Renditen und Volatilitätsänderungen von Aktien. Wenn es gelingt, solche Risikoänderungen vorherzusagen, die mit den Renditen negativ korrelieren, könnte durch die Risikoprognose neben der Risikoabsicherung zusätzlich auch eine höhere Rendite realisiert werden.

Aus diesen Ergebnissen lassen sich zwei Implikationen für die Anlagepraxis ableiten. Zum einen sollten sich die Investoren über die Risikoprognosemodelle und -fähigkeiten der Asset Manager informieren. Diese Modelle können für den Erfolg einer Kapitalanlage eine ebenso bedeutende Rolle spielen wie die Verfahren der Renditeprognose. Zum anderen müssen die Anlagestrategien identifiziert werden, in denen eine Prognose von Risiken eine besondere Bedeutung einnimmt und die kurzfristig gesteuert werden müssen. Dies sind neben Wertsicherungsstrategien beispielsweise auch Best-of-n-Asset-Strategien. Andere Strategien, bei denen das Risikomanagement eine große Bedeutung hat, die aber nicht kurzfristig gesteuert werden, sind Minimum-Variance-Ansätze und ggf. auch passive Strategien. Der Vorteil einer Risikoprognose nimmt bei diesen Strategien mit der Länge der Haltedauer und damit des Prognosehorizonts ab.

Die Ergebnisse dieser Studie zeigen, dass ein aktives Portfoliomanagement keineswegs auf die Prognose von Renditen beschränkt ist, sondern gerade bei kurzfristigem Anlagehorizont die Prognose von Risiken beinhalten sollte.

I Notation

Absolute Abweichung	Δ (Delta)
Aktueller Kurs des Underlyings einer Option	S_0
Aktueller Preis des Underlyings einer Option	S_0
Anzahl Beobachtungen	n
Anzahl in die Schätzung eingehender historischer Renditen	p
Anzahl in die Schätzung eingehender historischer Varianzen	r
Anzahl in die Schätzung eingehender historischer Zufallsfehler	q
Ausübungspreis einer Option (Basispreis)	K
Erwartungswert von x	$E(x)$
Exponentialfunktion von x	$e(x)$
Fester Zinssatz	r_{fix}
Funktion einer Variablen	$f(x)$
Integral über eine Funktion einer Variablen x von a bis b	$\int_a^b f(x)$
Konfidenzintervall des Value at Risk	α_{VaR}
Konstante	α (Alpha)
Konstante	β (Beta)
Konstante	θ (Theta)
Konstante	π (Pi)
Konstante	ϕ (Phi)
Konstante	ρ (Ro)
Konstante im Zeitpunkt t	η_t (Eta)
Kurtosis	β_2
Logarithmus von x	$\log(x)$
Lower Partial Moments der Ordnung m über x	LPM $(x)_m$
Mittelwert der Rendite eines Wertpapiers i	μ_i
Mittelwertschätzer der Rendite eines Wertpapiers i	$\hat{\mu}_i$
Natürlicher Logarithmus von x	$\ln(x)$
Prognose der Varianz	\hat{v}_{t+1}^2
Prognostizierter Fehler	$\hat{\varepsilon}$
Rendite	r_i
Restlaufzeit	T
Schätzer der Varianz eines Wertpapiers i	$\hat{\sigma}_i^2$
Schätzer des Zufallsfehlers eines Zufallsprozesses in t	$\hat{\varepsilon}_t$
Schiefe	ν_i
Summe über T bis n	\sum
Unabhängig identisch verteilt	iid
Value at Risk	VaR
Varianz	σ_i^2
Veränderung der Vermögensposition	Δw
Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	$N(x)$
Volatilität	σ_i
Wahrscheinlichkeit für x	$Pr(x)$
Wert einer europäischen Kaufoption	C
Wert einer europäischen Verkaufsoption	P
Wurzel aus α	$\sqrt{\alpha}$
Zeitraum	$t = 0, \dots, T$
Zielgröße	τ
Zufallsfehler im Zeitpunkt t	ε_t (Epsilon)
α -Quantil (1-Konfidenzintervall, beispielsweise 1%) von μ	$\mu(\alpha)$

II Risikomaße

Der Begriff Risiko ist ein fundamentales Element jeglicher finanzwirtschaftlicher Entscheidung. Dennoch variieren Bedeutungen und Assoziationen zum Teil erheblich zwischen verschiedenen wissenschaftlichen Disziplinen, etwa der Volkswirtschaftslehre, der Entscheidungstheorie, der Statistik oder der Kapitalmarkttheorie sowie in Bezug auf das zugrunde liegende Objekt. Konzentriert man sich auf das Risiko eines Wertpapiers, ist eine konkrete Definition immer noch mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden. Dies hängt individuell von den Zielsetzungen und Präferenzen des Anlegers ab sowie von den institutionellen Gegebenheiten, z. B. den externen und den internen Anlagebeschränkungen. Risiko im Kapitalanlagebereich bezeichnet allgemein die über eine Wahrscheinlichkeitsverteilung spezifizierte Unsicherheit bezüglich zukünftiger Finanzergebnisse innerhalb eines vorgegebenen Zeitrahmens.³¹

In der Literatur werden verschiedene Möglichkeiten zur Abbildung des Risikos diskutiert. Entweder betrachtet man die gesamte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Rückflüsse oder aber einzelne Momente der Verteilung. Im ersten Fall nutzt man das Konzept der stochastischen Dominanz, das in der Praxis nur äußerst schwer anwendbar ist und deswegen an dieser Stelle nicht berücksichtigt wird. Bei der Betrachtung einzelner Momente wird eine stärkere Abstraktion vorgenommen, denn Informationen werden in einzelnen Kennzahlen gebündelt. Innerhalb dieser Gruppe lassen sich wiederum zwei alternative Konzepte unterscheiden. Die symmetrische Betrachtung (zentrale Momente) berücksichtigt jegliches Abweichen vom Erwartungswert. Intuitiv widerspricht dies der Vorstellung, nach der lediglich das Unterschreiten des Erwartungswertes als negativ empfunden wird (Downside-Risiko). Positive Abweichungen werden als „Chance“ oder wünschenswert erachtet. Entsprechend lassen sich verschiedene Risikomaße identifizieren.

i Zentrale Momente als Risikomaße

Normalverteilte Zufallsvariablen lassen sich vollständig durch die Lageparameter, den Mittelwert und die Standardabweichung beschreiben. Der Mittelwert gibt das erste Moment der Verteilung an und entspricht dem Erwartungswert. Dieser errechnet sich als Durchschnitt aller beobachteten Renditen (r_i), für $i = 1, \dots, n$:

$$\mu_i := E(r_i) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_{it}).$$

Die Volatilität bzw. Standardabweichung (σ_i , Sigma) gibt die Breite der Wahrscheinlichkeitsverteilung um den Erwartungswert an. Sie lässt sich errechnen aus der Wurzel der Varianz der Renditen (σ_i^2). Diese bestimmt sich aus dem Durchschnitt der quadrierten Abweichungen vom Mittelwert (μ_i) aller Beobachtungen. Demnach ist die Varianz das Quadrat der Volatilität. Für eine normalverteilte Zufallsvariable lässt sich die 68-95-Regel anwenden, nach der ca. 68% bzw. 95% der Verteilung innerhalb des Intervalls von +/- eine bzw. zwei Standardabweichungen um den Erwartungswert liegen:

$$\text{var}(i) := \sigma_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_{it} - \mu_i)^2.$$

$$\text{sd}(i) := \sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}.$$

Die Schiefe (v_i) gibt zusätzlich an, wie weit die Verteilung von einer Normalverteilung mit einer Schiefe von 0 abweicht. Negative Werte geben an, dass die Verteilung linksschief ist und damit eine hohe Wahrscheinlichkeit für große negative Werte bzw. erhöhtes Risiko aufweist. Sie lässt sich wie folgt berechnen:

$$v(i) := \frac{\mu^3(ri)}{\sigma^3(ri)} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_{it} - \mu_i)^3}{\sigma_i^3}.$$

³¹ Weitere Definitionen sind: die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes, die Möglichkeit eines Verlustes, die Unsicherheit, die Abweichung eines Ergebnisses vom Erwartungswert oder etwa die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung des realisierten Ergebnisses vom erwarteten. Vgl. Vaughan (1997), S. 7-8 sowie Jorion (2007), S. 3-4.

Mit der Kurtosis (β_2 , Wölbung) lässt sich die „Spitzigkeit“ der Verteilung in einer Kennzahl ausdrücken. Die Normalverteilung weist einen Wert von 3 auf. Kleinere Werte bedeuten demnach eine flachgipflige, supergaußförmige bzw. platykurtische Verteilung, für die Extremwerte und demnach Verluste wahrscheinlicher sind als bei einer Normalverteilung. Die Berechnung ergibt sich aus:

$$\beta_2(i) := \frac{\mu^4(ri)}{\sigma^4(ri)} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_{it} - \mu_i)^4}{\sigma_i^4}$$

ii Downside-Risk-Risiko-Maße

Ausfallbezogene Risikomaße für stetige Verteilungen, auch Shortfall-Maße oder Downside-Risk-Maße folgen der allgemein üblichen Vorstellung vom Risiko als Gefahr der Realisation eines Wertes unterhalb einer kritischen finanzwirtschaftlichen Zielgröße (τ). Der allgemeine Ansatz wird Lower Partial Moments der Ordnung m (LPM m) genannt. Diese LPMs errechnen sich wie folgt:

$$LPM(\tau)_m = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - \mu_i)^m \cdot f(\mu_i) d\mu_i$$

mit τ als Zielgröße, die nicht unterschritten werden soll. Dabei unterscheidet man die folgenden Spezialfälle: die Ausfallwahrscheinlichkeit (LPM 0 mit $m = 0$), die Ausfallhöhe (LPM 1 mit $m = 1$) und die Ausfallvarianz (LPM 2 mit $m = 2$).

Der Value at Risk (VaR) schließlich misst die potenzielle zukünftige Wertänderung eines Portfolios bei einem spezifizierten Konfidenzintervall (z. B. 99%) nach einem festgelegten Zeitraum (z. B. 10 Tage) und bei einer angenommenen Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ergebnisvariablen. Er ist demnach eine Antwort auf folgende Frage: Was ist vermutlich der Verlust über einen bestimmten Zeitraum, der mit einer sehr hohen Wahrscheinlichkeit, z. B. 99%, nicht überschritten wird?³² Abbildung 8 zeigt eine Verteilung für normalverteilte Gewinne und Verluste eines Portfolios. Bei obigem Konfidenzintervall begrenzt der VaR 99% der Fläche unter der Dichtefunktion möglicher zukünftiger Vermögenswerte rechtsseitig.

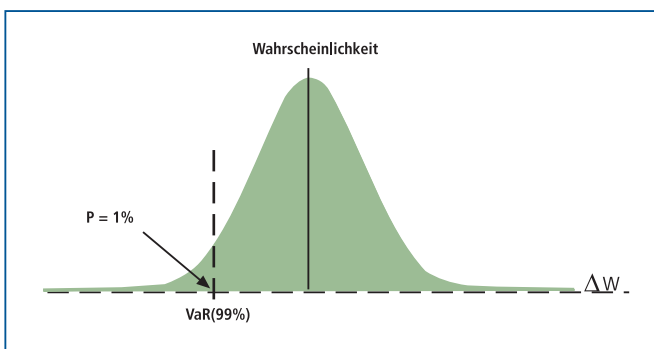


Abbildung 8:
Value at Risk für normalverteilte Gewinne und Verluste einer Vermögensposition ΔW

³² Zwar ist der VaR einfach zu kommunizieren, er stellt aber keinen maximalen Verlust dar. Bei einem Konfidenzintervall von 95%, einem Zeithorizont von einem Tag und unterstellter Normalverteilung wird der VaR durchschnittlich alle 20 Tage überschritten.

Formal lässt sich dies wie folgt darstellen:

$$VaR(p) = w - \mu(p),$$

mit $\mu(p)$ als p -Quantil (beispielsweise 1%-Quantil) von μ , $Pr(\mu \leq \mu(p)) = p$ und w als Referenzwert bzw. Zielgröße z. B. $w = 0 - VaR(p)_t$ oder $w = \mu - VaR(p)_e$.

Als Beispiel zur Berechnung stelle man sich ein Wertpapierportfolio mit einem Wert von 100, einer Volatilität von 20% p. a., einer Haltedauer von 10 Tagen und einem Konfidenzintervall von 99% vor. Daraus lässt sich der VaR bei unterstellter Normalverteilung errechnen:

$$\Delta w = 100 \times 20\% \times \sqrt{\frac{10}{250}} \cdot Pr(x \leq (1 - 99\%)) = 9,32.$$



III Parameterschätzung

i Rendite

Grundsätzlich gilt, dass man nicht die tatsächliche Verteilung einer Zufallsvariable kennt, sondern lediglich eine Stichprobe beobachten kann. Daraus muss man die tatsächlichen Parameter ermitteln. Wir nehmen nun an, dass die Renditen eines Wertpapiers i zu jedem Zeitpunkt t unabhängig, identisch verteilt sind (*iid*). Es gilt damit:

$$r_{it} \sim iid \text{ für alle } t.$$

Daraus lässt sich der Maximum-Likelihood-Schätzer, der Mittelwert ($\hat{\mu}_i$) aller beobachteten Renditen, wie folgt ableiten:³³

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^n r_{it}.$$

wobei T den Schätzzeitraum (in Jahren) und n die Anzahl der Subperioden bezeichnet. Um nun Aussagen über die Güte des Schätzers machen zu können, bestimmen wir dessen Varianz.

$$\text{var } \hat{\mu}_i = \frac{\sigma_i^2}{T}.$$

ii Varianz

Für die Varianz verwenden wir als erwartungstreuen Schätzer (ML-Schätzer: erster Term $\frac{1}{T}$):

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T - \Delta t} \sum_{t=1}^n (r_{it} - \hat{\mu}_i \Delta t)^2.$$

wobei der Schätzzeitraum n Beobachtungen der Periodenlänge Δt enthält. Demnach gibt Δt die Datenfrequenz an. Es gilt also $T = n * \Delta t$. Die Güte des Schätzers lässt sich wiederum durch dessen Varianz messen:

$$\text{var}(\hat{\sigma}_i^2) = \frac{2\hat{\sigma}_i^4}{\left(\frac{T}{\Delta t}\right) - 1}.$$

³³ Beim Maximum-Likelihood-Schätzer werden die zu schätzenden Parameter so gewählt, dass die Wahrscheinlichkeit, die beobachteten Daten zu erhalten, möglichst groß wird. Vgl. Gujarati (2003), S. 114–117.

iii Portfoliogewichte

Im Folgenden wollen wir die Auswirkung von Schätzfehlern auf die Zusammensetzung eines Portfolios verdeutlichen. Wir stellen uns hierzu vier Aktien mit einer Rendite von 10%, einer Volatilität von 40% und einer paarweisen Korrelation von 0,2 vor. Der risikolose Zins beträgt 4%. Im optimalen Portfolio wird in allen vier risikobehafteten Anlagen jeweils 25% investiert.³⁴ Wir unterscheiden nun drei Fälle von Schätzfehlern: in der Rendite (Fall 1), in der Volatilität (Fall 2) und in der Korrelation (Fall 3) (vgl. Tabelle 6). Nun variieren wir systematisch eine dieser Fehlerquellen (vgl. Tabelle 7).³⁵ Dies führt zu einer Neuverteilung der Gewichte innerhalb des Portfolios.

Fehlerquelle	Parametern der Aktie 1		
	Rendite (μ_1)	Volatilität (σ_1)	Korrelation (ρ_1)
Fall 1	Schätzfehler	Bekannt	Bekannt
Fall 2	Bekannt	Schätzfehler	Bekannt
Fall 3	Bekannt	Bekannt	Schätzfehler

Tabelle 6: Fälle zur Bestimmung der Komponenten des Schätzrisikos

Betrachtet man Spalte 7 von Tabelle 7, so erkennt man, dass die Anlage 1 bei einer Überschätzung der Rendite um lediglich 2% zum ca. 1,5-Fachen des eigentlich „wahren“ Gewichtes von 25% im Portfolio berücksichtigt wird. Eine Unter- bzw. Überschätzung der Volatilität ebenfalls um 2% hingegen zeigt einen wesentlich geringeren Einfluss auf das Portfolio. Ein Schätzfehler in der Korrelation schließlich zeigt die geringste Auswirkung auf die Portfoliozusammensetzung.³⁶

Gewichtung der Aktie 1	Schätzfehler in den Parametern der Aktie 1								
	-10%	-5%	-2%	-1%	0%	1%	2%	5%	10%
Fall 1 (Rendite)	-82%	-14%	11%	18%	25%	31%	37%	51%	69%
Fall 2 (Volatilität)	43%	33%	28%	26%	25%	24%	22%	19%	14%
Fall 3 (Korrelation)	27%	26%	25%	25%	25%	25%	25%	24%	24%

Tabelle 7: optimales Gewicht für Aktie 1 in Abhängigkeit vom Schätzfehler

³⁴ In Abhängigkeit von der Risikoaversion des Anlegers wird dieses mit der risikofreien Anlage im Gesamtportfolio gemischt. Das sog. Tangentialportfolio bleibt in seiner Zusammensetzung gleich. Vgl. zur Asset-Allokation bzw. Tobin-Separation die Originalartikel von Markowitz (1952) und Tobin (1958).

³⁵ Im Fall der Korrelation wird nur diejenige von Aktie 1 mit Aktie 2 verändert.

³⁶ Vgl. Kempf/Memmel (2002), S. 898 – 901 und Chopra/Ziembra (1993).

In Abbildung 9 ist deutlich zu erkennen, dass sich Schätzfehler in den erwarteten Renditen (Fall 1, konkav steigende Funktion) am stärksten auf die Portfolioallokation auswirken. Während Unterschätzungen der Rendite zu einer erheblichen Untergewichtung im Portfolio führen, steigt das Gewicht von Aktie 1. Im ersten Fall wird das Papier untergewichtet, da die Attraktivität des Papiers bei gleichbleibendem Risiko und geringerer Rendite abnimmt. Im zweiten Fall hingegen wird es übergewichtet, da das Portfoliorisiko bei gleicher Rendite erheblich geringer ausfällt. Bei Über- bzw. Unterschätzungen der Korrelation ergibt sich hingegen kaum eine Änderung der Portfolioallokation.

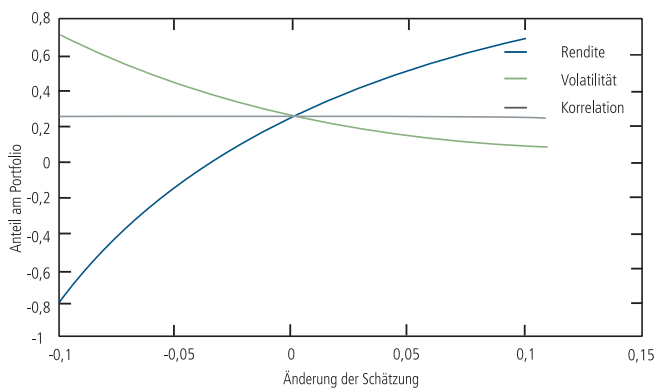


Abbildung 9:
Optimales Gewicht für
Aktie 1 in Abhängigkeit vom
Schätzfehler

Anteil von Anlage 1
am Portfolio

iv Autokorrelation im DAX

In diesem Abschnitt betrachten wir die Autokorrelation von Aktienrenditen und quadrierten Renditen als Approximation der Tagesvarianz für den DAX im Zeitraum vom 1. Januar 1990 bis 31. August 2001. Die Autokorrelation misst, welche Aussagekraft die historischen Parameter für die zukünftigen Parameter besitzen. Der Lag gibt dabei die Zeitabstände zwischen zwei Beobachtungen wieder. Zeile 1 von Tabelle 8 gibt demnach an, wie hoch die Korrelation zwischen der Rendite bzw. Varianz zum Zeitpunkt t zum Zeitpunkt $t+\text{Lag} = t+1$ ist. In den Spalten neben den Werten für die Autokorrelation lassen sich die t -Werte sowie die p -Werte ablesen. Die ermittelten Autokorrelationen werden auf Signifikanz getestet. Für Renditen ist die Autokorrelation lediglich bei Lag 6 hochsignifikant, für quadrierte Renditen ist dies hingegen für alle 10 Lags der Fall.

Lag	Rendite			R ²		
	Autokorrelation	t -Wert	p -Wert	Autokorrelation	t -Wert	p -Wert
1	0,01	0,76	0,44	0,17	9,49	0
2	-0,03	-1,49	0,14	0,17	9,25	0
3	-0,02	-0,95	0,34	0,16	8,81	0
4	0,01	0,49	0,62	0,14	7,82	0
5	0,02	1,16	0,25	0,14	7,81	0
6	-0,06	-3,13	0	0,11	6,00	0
7	-0,04	-2,05	0,04	0,12	6,65	0
8	-0,01	-0,34	0,73	0,12	6,62	0
9	0,00	-0,07	0,94	0,09	4,97	0
10	0,02	0,91	0,36	0,08	4,69	0

Tabelle 8: Autokorrelation für den DAX vom 01.01.1990 bis 31.08.2001

Konfidenzintervall ($n \rightarrow \infty$)	t -Wert	p -Wert
90%	1,645	0,10
95%	1,960	0,05
99%	2,576	0,01

Tabelle 9: in der empirischen Forschung übliche Signifikanzniveaus bei zweiseitigen Tests.

IV Ökonometrische Schätzverfahren

Zur Prognose der Varianz kommen zwei grundlegend unterschiedliche Klassen von Verfahren zum Einsatz. Dieser Abschnitt widmet sich den mathematischen Grundlagen sowie den Ergebnissen der empirischen Ermittlung der Risikoprognosen auf Basis von rein statistischen Verfahren. Es wird ausdrücklich kein ökonomischer Zusammenhang bei der Prognose der Varianz unterstellt. Das zweite Verfahren basiert auf einem ökonomischen Modell.

i Historical Average bis Exponential Weighted Moving Average

Im Smoothing-Verfahren (Glättungsansatz) wird die Varianzprognose als gewichtete Summe der frei wählbaren Anzahl der letzten t historischen Werte berechnet. Die Prognose lässt sich also bei Kenntnis der letzten vergangenen Beobachtungen ermitteln, ohne Annahmen über die Entwicklung der Varianz im Zeitablauf treffen zu müssen. Das einfachste Verfahren stellt das Historical-Average-Verfahren dar, bei dem die Prognose aus dem Mittelwert aller historischen Werte ermittelt wird. Im Moving-Average-Verfahren wird ein gleichbleibendes Fenster von historischen Beobachtungen zur Ermittlung der Prognose herangezogen. Will man die abnehmende Autokorrelation einer Varianzzeitreihe berücksichtigen (vgl. den vorherigen Abschnitt, III iv) muss die Bedeutung beobachteter Varianzen abnehmen, je weiter diese zurückliegen. Nimmt diese exponentiell ab, während alle Beobachtungen Berücksichtigung finden, spricht man vom Exponential Smoothing. Beim Exponential-Weighted-Moving-Average-Verfahren dagegen werden lediglich t Vorperioden berücksichtigt. Die Prognose der Varianz (\hat{v}_{t+1}^2) ergibt sich in diesem Fall aus:

$$\hat{v}_{t+1}^2 = \frac{1}{t+1} \sum_{i=0}^t \alpha (1-\alpha)^i v_{t-i}^2 \text{ mit } 0 < \alpha < 1 \text{ als Glättungsparameter.}$$

Im linken Teil von Abbildung 10 wird die Risikoprognose mit dem Exponential-Weighted-Moving-Average-Verfahren dargestellt (geringe Schwankung) und mit den tatsächlichen Varianzen (hohe Schwankung) verglichen. Im rechten Teil befinden sich die quadrierten Abweichungen als Indikator für die Prognosegüte.

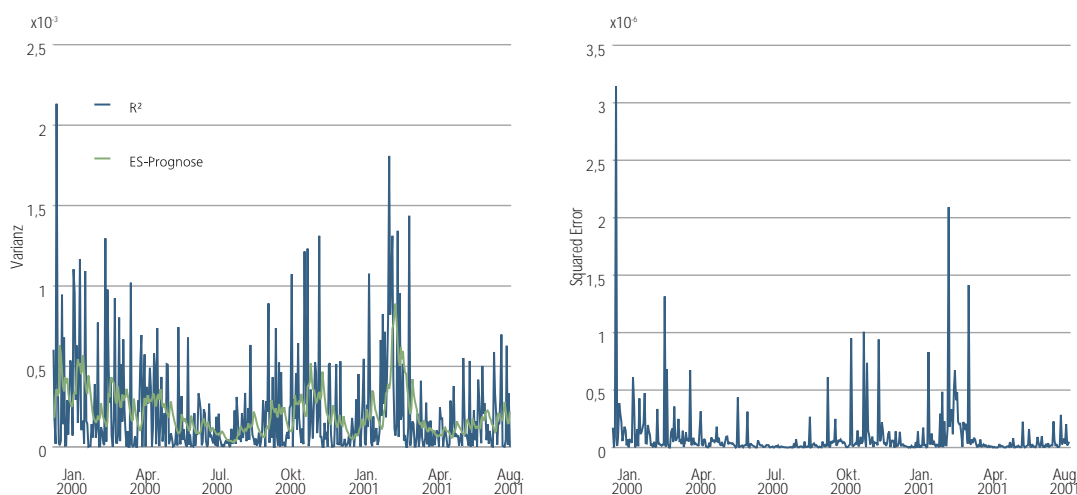


Abbildung 10:
Prognoseergebnisse eines
Exponential-Smoothing-
Verfahrens für den DAX vom
01.01.2000 bis 30.08.2001
Links: Varianz-Prognose mit
Exponential Smoothing
Rechts: Squared Error der
Prognose

Grundsätzlich lassen sich die in diesem Abschnitt betrachteten Methoden auch für weiter in der Zukunft liegende Prognosen heranziehen. Möchte man eine Prognose für den Zeitpunkt $t+2$ abgeben, muss zuerst die Prognose für den nächsten Termin ($t+1$) ermittelt werden. Diese kann dann wiederum für die weiter in der Zukunft liegende Prognose Verwendung finden. Für das Exponential-Weighted-Moving-Average-Verfahren ergibt sich somit:

$$\widehat{v_{t+1}^2} = \frac{1}{t+1} (\alpha \widehat{v_t^2} + \sum_{i=0}^{t-1} \alpha (1-\alpha)^i v_{t-i-1}^2).$$

ii ARMA-Modelle

Bei der Klasse der ARMA-Modelle macht man sich die Eigenschaft vieler Zeitreihen zunutze, dass sich deren Verhalten in kurzen Zeiträumen nicht wesentlich ändert.³⁷ Dies macht es möglich, historische Beobachtungen zur Bestimmung eines zukünftigen Wertes heranzuziehen. Um dennoch Varianzinnovation zuzulassen, wird dies um einen Zufallsprozess ergänzt.

AR(p)-Prozess und Prognose

Bei Autoregressiven (AR-)Prozessen p -ter Ordnung ergibt sich die Varianz aus einer Konstante (μ) und p , gewichteten Varianzen der p Vorperioden. Dieser Prozess wird um einen unkorrelierten, typischerweise standardnormalverteilten Zufallsfehler (ε_t) ergänzt. Der Prozess stellt sich wie folgt dar:

$$v_t^2 = \mu + \theta_1 v_{t-1}^2 + \dots + \theta_k v_{t-p}^2 + \varepsilon_t,$$

mit $\mu = \text{const.}$, $E(\varepsilon_t) = 0$, $\sigma^2(\varepsilon_t) = \text{const.}$, $\text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t) = 0$, sowie typischerweise

$$\varepsilon_t \sim \text{iid } N(0,1).$$

Die Frage, wie viele Lags in der Prognose zu berücksichtigen sind, lässt sich mithilfe des Akaike Information Criterion sowie des Bayesian bzw. Schwarz Information Criterion beantworten.³⁸ Die beobachteten Varianzen gehen mithilfe eines empirisch zu ermittelnden Gewichtes (θ_j) in die Prognose ein.³⁹ Bei der Varianzprognose wird der normalverteilte Zufallsfehler vernachlässigt, da er den Erwartungswert 0 besitzt:

$$\widehat{v_{t+1}^2} = \mu + \theta_1 v_t^2 + \dots + \theta_k v_{t-p}^2.$$

Für den DAX haben wir im Zeitraum vom 1. Januar 2000 bis 30. August 2001 einen AR(6)-Prozess wie folgt empirisch ermittelt:

$$\widehat{v_{t+1}^2} = 7,9234 \cdot 10^{-5} + 0,1133 v_t^2 + 0,1026 v_{t-1}^2 + 0,0913 v_{t-2}^2 + 0,0709 v_{t-3}^2 + 0,0732 v_{t-4}^2 + 0,0338 v_{t-5}^2 + \varepsilon_{t+1}.$$

³⁷ Die hier vorgestellten Modelle unterstellen alle schwache Stationarität des Varianzprozesses, d. h. Mittelwert sowie Varianz des Prozesses sind konstant. Die Autokovarianz zweier Zeitintervalle ist zudem allein abhängig vom zeitlichen Abstand (Lags) und nicht vom Zeitpunkt, zu dem diese errechnet wird, vgl. Gujarati (2003), S. 797.

³⁸ Eine Beschreibung der Methoden zur Auswahl eines Prognosemodells muss an dieser Stelle unterbleiben. Vgl. hierzu Green (2008), S. 142–143 sowie Gujarati (2003), S. 537–538.

³⁹ Die Ermittlung der Konstanten und der Gewichte erfolgt mittels Kleinste-Quadrate-Schätzung (OLS).

Im linken Teil von Abbildung 11 wird die Risikoprognose mit diesem AR(6)-Prozess dargestellt (geringe Schwankung) und mit den tatsächlichen Varianzen (hohe Schwankung) verglichen. Im rechten Teil befinden sich wiederum die quadrierten Abweichungen.

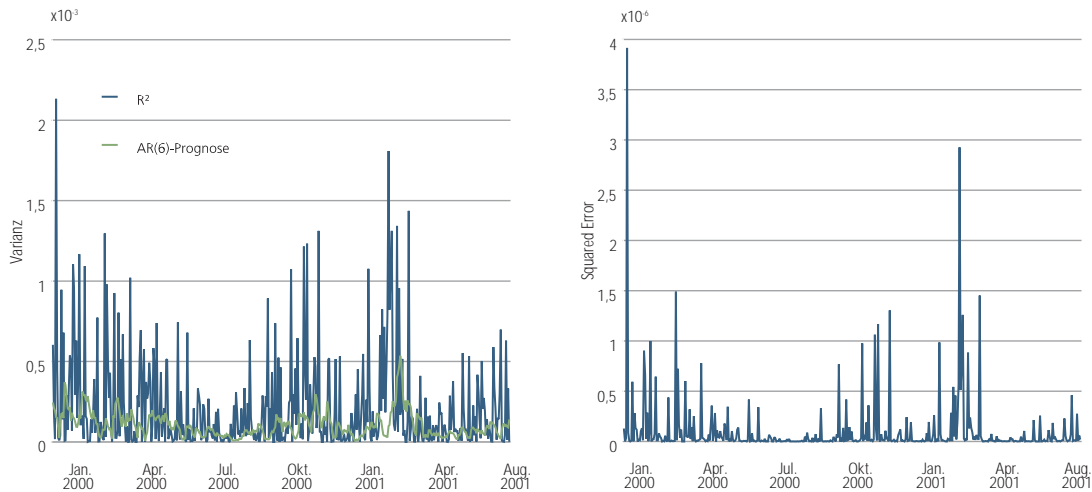


Abbildung 11:
Prognoseergebnisse eines
AR(6)-Verfahrens für den
DAX vom 01.01.2000
bis 30.08.2001
Links: Varianz-Prognose
mit AR(6)-Verfahren
Rechts: Squared Error der
Prognose

MA(q)-Prozess und Prognose

Modelliert man die Varianz als Ergebnis der Summe einer Konstante (μ) und gewichteter gegenwärtiger und vergangener Störungen (ε_t), bezeichnet man dies als Moving-Average-Prozess. Die Ordnung (q) gibt die Anzahl der berücksichtigten Lags an. Der stochastische Prozess lässt sich demnach wie folgt darstellen:

$$v_t^2 = \mu + \varepsilon_{t-1} + \alpha_1 \varepsilon_{t-2} + \dots + \alpha_k \varepsilon_{t-q-1}$$

Die Varianzprognose basiert in diesem Fall auf einem fixen Zeitfenster historischem sowie aktuellem Zufallsschock. Die Gewichtung wird über einen längeren Zeitraum als Durchschnitt bestimmt (Moving Average). Für die Varianzprognose folgt daher:

$$\widehat{v_{t+1}^2} = \mu + \alpha_1 \widehat{\varepsilon_t} + \dots + \alpha_k \widehat{\varepsilon_{t-q}}$$

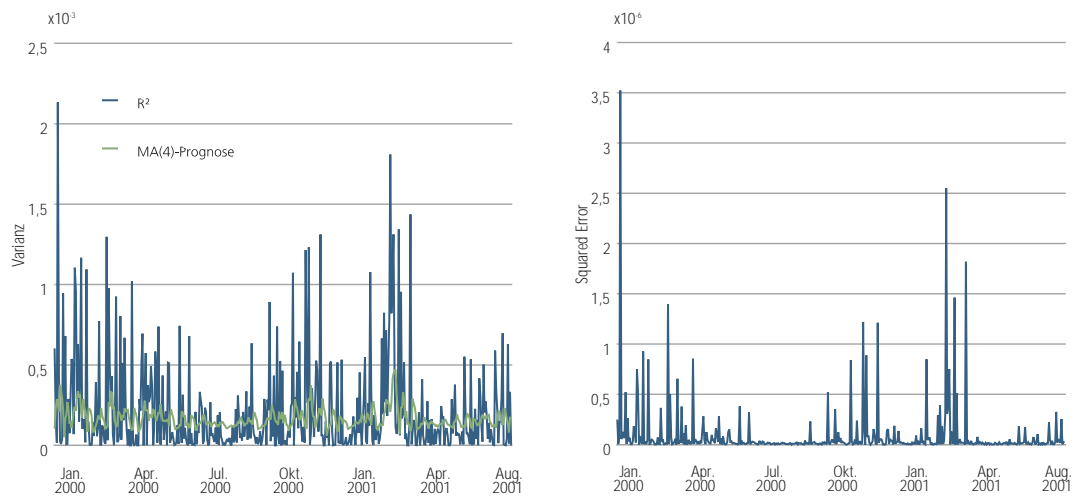
mit $\widehat{\varepsilon_t} = v_t^2 - \widehat{v_t^2}$.

Die Bestimmung der optimalen Länge der Lags erfolgt äquivalent zum Vorgehen bei den $AR(p)$ -Prognosen.⁴⁰ Der von uns ermittelte MA(4)-Prozess für den DAX im Zeitraum zwischen 1. Januar 2000 und 30. August 2001 sieht wie folgt aus:

$$\widehat{v_{t+1}^2} = 1,5204 \cdot 10^{-4} + 0,1230 \varepsilon_t + 0,1158 \varepsilon_{t-1} + 0,1044 \varepsilon_{t-2} + 0,0778 \varepsilon_{t-3}.$$

Im linken Teil von Abbildung 12 wird die Risikoprognose mit einem MA(4)-Prozess dargestellt (geringe Schwankung) und mit den tatsächlichen Varianzen (hohe Schwankung) verglichen. Im rechten Teil befinden sich die quadrierten Abweichungen.

Abbildung 12:
Prognoseergebnisse eines
MA(4)-Verfahrens für den
DAX vom 01.01.2000
bis 30.08.2001
Links: Varianz-Prognose
mit MA(4)-Verfahren
Rechts: Squared Error der
Prognose



⁴⁰ Zur Ermittlung vgl. die Ausführungen zu den $AR(p)$ -Prozessen sowie hierzu Green (2008), S. 142–143 und Gujarati (2003), S. 537–538.

ARMA(p,q)-Prozess und Prognose

Möchte man die Eigenschaften der vorherigen beiden Prozesse kombinieren, erhält man einen ARMA(p,q)-Prozess. Die Varianz ist in diesem Fall das Resultat eines stochastischen Prozesses, der auf p historisch beobachteten Varianzen sowie q ermittelten Störtermen beruht:

$$v_t^2 = \mu + \theta_1 v_{t-1}^2 + \dots + \theta_p v_{t-p}^2 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t.$$

Daraus lässt sich die Prognose ableiten:

$$\widehat{v_{t+1}^2} = \mu + \theta_1 v_t^2 + \dots + \theta_p v_{t-p}^2 + \alpha_1 \widehat{\varepsilon}_t + \dots + \alpha_q \widehat{\varepsilon}_{t-q}$$

$$\widehat{\varepsilon}_t = v_t^2 - \widehat{v_t^2}.$$

Bestimmt man für den DAX im Zeitraum zwischen 1. Januar 2000 und 30. August 2001 einen ARMA(3,3)-Prozess, erhält man dieses Ergebnis:

$$\widehat{v_{t+1}^2} = 3,3782 \cdot 10^{-5} + 0,1165 v_t^2 + 0,1267 v_{t-1}^2 + 0,1146 v_{t-2}^2 + 0,1111 \varepsilon_t + 0,1022 \varepsilon_{t-1} + 0,1062 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t+1}.$$

Im linken Teil von Abbildung 13 wird die Risikoprognose mit einem ARMA(3,3)-Prozess dargestellt (geringe Schwankung) und mit den tatsächlichen Varianzen (hohe Schwankung) verglichen. Im rechten Teil befinden sich die quadrierten Abweichungen. Man erkennt auch hier wiederum, dass die Prognose nicht so stark schwankt wie die Tagesvarianzapproximation.⁴¹

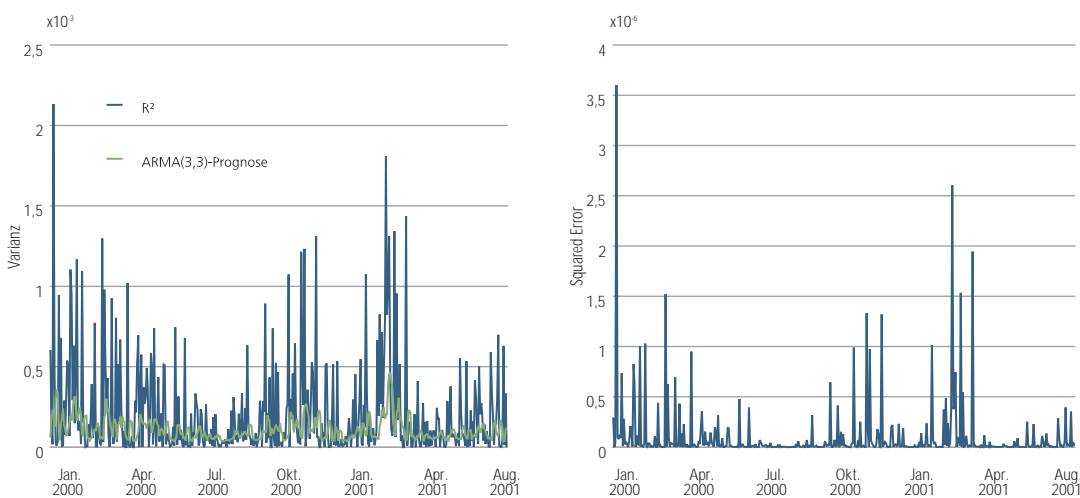


Abbildung 13:
Prognoseergebnisse eines
ARMA(3,3)-Verfahrens für
den DAX vom 01.01.2000
bis 30.08.2001
Links: Varianz-Prognose
mit ARMA(3,3)-Verfahren
Rechts: Squared Error der
Prognose

⁴¹ Zur Problematik der Approximation der Varianz durch quadrierte Renditen vgl. 3.1.

iii ARCH/GARCH-Modelle

Will man die zeitliche Variabilität der Varianz sowie die empirisch beobachtbare Häufung von hohen bzw. niedrigen Volatilitäten (Volatility Clustering) und der Leptokurtosis der Renditeverteilung in die Modelle mit einbeziehen, gelingt dies mithilfe der ARCH- sowie der Verallgemeinerung der GARCH-Prozesse.

Test auf ARCH-Effekte

Die Frage, ob diese Modelle bei der Risiko- und Renditeprognose angewandt werden dürfen, kann mithilfe eines Tests auf ARCH-Effekte beantwortet werden.⁴² Für die quadrierten Returns als Proxy der Varianz sind die ersten 6 Lags signifikant zum 1%-Niveau. Betrachtet man hingegen das 5%-Niveau, sind sogar die ersten 10 Lags signifikant. Bei den Returns lassen sich erwartungsgemäß keine ARCH-Effekte finden.

Lag	Returns			Squared Returns		
	p-Wert	Teststatistik	Kritischer Wert	p-Wert	Teststatistik	Kritischer Wert
1	0,000	12,798	6,635	0,985	0,000	6,635
2	0,001	13,033	9,210	1,000	0,001	9,210
3	0,002	15,384	11,345	1,000	0,001	11,345
4	0,003	16,304	13,277	1,000	0,001	13,277
5	0,006	16,478	15,086	1,000	0,002	15,086
6	0,010	16,859	16,812	1,000	0,002	16,812
7	0,017	17,027	18,475	1,000	0,003	18,475
8	0,029	17,072	20,090	1,000	0,003	20,090
9	0,048	17,066	21,666	1,000	0,003	21,666
10	0,073	17,070	23,209	1,000	0,004	23,209
11	0,103	17,159	24,725	1,000	0,004	24,725
12	0,143	17,169	26,217	1,000	0,004	26,217

Tabelle 10: Ergebnisse für Engle's ARCH-Test für den DAX vom 01.01.2001 bis 30.08.2001

⁴² Vgl. Gujarati (2003), S. 859.

ARCH(p, q)-Prozess und Prognose

Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH) bezeichnet Prozesse, die Autoregressive Strukturen aufweisen. Dabei werden Varianz und Rendite gemeinsam modelliert. Die Varianz zum Zeitpunkt t ist eine deterministische Funktion zeitverzögerter Kursänderungen (AR). Sie ist also durch die Kenntnis vergangener Renditen (C) bedingt. Heteroskedastizität (H) bezeichnet Modelle, deren Varianz nicht konstant ist. Wie empirisch zu beobachten ist, kommt es bei der Varianz zum Volatility Clustering. Das heißt, Renditen zeigen Phasen hoher bzw. niedriger Schwankung, wobei dennoch ein Streben zum Mittelwert beobachtbar ist (Mean-Reverting-Verhalten).⁴³

Zentral für die ARCH(p, q)-Modelle ist, dass die Rendite und Varianz gemeinsam ermittelt werden müssen.⁴⁴ Die Rendite wird als Prozess aus einer Konstante (μ), einer Anzahl (p) historische gewichteter Renditen und einem Zufallsfehler generiert. Dieser Zufallsfehler ergibt sich wiederum aus der Wurzel der Summe q historische gewichteter, quadrierter Zufallsfehler (ε_t). Da die Varianz die Schwankung des Zufallsprozesses angibt, lässt sie sich in Abhängigkeit vom Fehlerterm darstellen. Die Prozesse haben damit folgende Form:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \theta_1 r_{t-1} + \dots + \theta_p r_{t-p-1}, \\ \sigma_t^2 &= \pi + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q-1}^2, \\ \text{mit } \mu, \pi &= \text{const.}, E(\varepsilon_t) = 0, \sigma^2(\varepsilon_t) = \sigma_t^2, \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 0. \end{aligned}$$

Daraus lässt sich nun die Varianzprognose relativ einfach ableiten. Die Bestimmung der Anzahl der zu berücksichtigenden Lags erfolgt mithilfe ökonomischer Tests:⁴⁵

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_{t+1}^2 &= \pi + \alpha_1 \widehat{\varepsilon}_t^2 + \dots + \alpha_q \widehat{\varepsilon}_{t-q}^2, \\ \text{mit } \widehat{\varepsilon}_t^2 &= (r_t - \mu - \theta_1 r_{t-1} - \dots - \theta_p r_{t-p-1})^2. \end{aligned}$$

Bestimmt man empirisch den ARCH(1,2)-Prozess für den DAX im Zeitraum zwischen 1. Januar 2000 und 30. August 2001, erhält man dieses Ergebnis:

$$\begin{aligned} \widehat{r}_{t+1} &= 8,4171 \cdot 10^{-4} - 0,0224 r_t + \varepsilon_{t+1}, \\ \widehat{\sigma}_{t+1}^2 &= 9,5991 \cdot 10^{-5} + 0,1607 \varepsilon_t^2 + 0,2098 \varepsilon_{t-1}^2. \end{aligned}$$

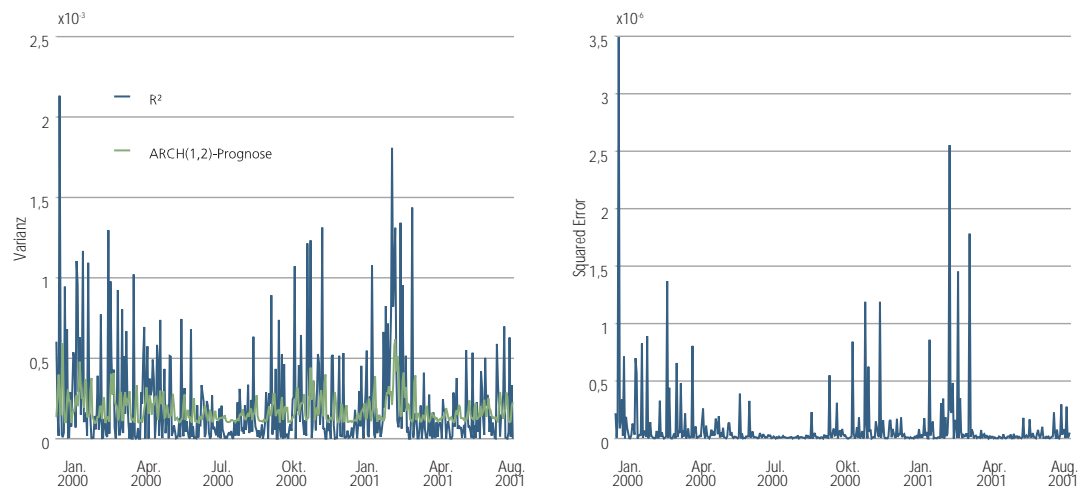
Das Ergebnis lässt sich in Abbildung 14 ablesen. Links wird die Risikoprognose mit einem ARCH(p, q)-Prozess dargestellt (geringe Schwankung) und mit den tatsächlichen Varianzen (hohe Schwankung) verglichen. Im rechten Teil befinden sich die quadrierten Abweichungen.

⁴³ Für eine Intuition zum Volatility Clustering vgl. Abbildung 3 sowie Abbildung 4 wie auch die Abbildungen zu den Prognoseergebnissen. Zum Zusammenhang von Volatility Clustering und Heteroskedastizität vgl. Poddig / Dichtl / Petersmeier (2008), S. 321–331. Zur Stationarität und Mean Reversion vgl. Verbeek (2004), S. 266–276.

⁴⁴ Für einen ausführlichen, aber anspruchsvollen Überblick zur Maximum Likelihood Estimation vgl. Greene (2008), Chap. 16, S. 482–572.

⁴⁵ Eine Beschreibung der Methoden zur Bestimmung der Anzahl der Lags muss an dieser Stelle unterbleiben. Vgl. zum Akaike Information Criterion und zum Schwarz Information Criterion Green (2008), S. 142–143 sowie Gujarati (2003), S. 537–538.

Abbildung 14:
 Prognoseergebnisse eines
 ARCH(1,2)-Verfahrens für
 den DAX vom 01.01.2000
 bis 30.08.2001
 Links: Varianz-Prognose
 mit ARCH(1,2)-Verfahren
 Rechts: Squared Error der
 Prognose



GARCH(p,q,r)-Prozess

Der GARCH(p,q,r)-Prozess (Generalized ARCH) stellt die Verallgemeinerung des ARCH-Prozesses dar. Er erlaubt eine sparsamere Parametrisierung sowie eine flexiblere Lag-Struktur. Auch hier werden Rendite und Risiko gemeinsam modelliert. Zentraler Unterschied ist, dass die Varianz nicht nur von den q historischen quadrierten Zufallsfehlern sondern auch von r beobachteten, konditionalen Varianzen abhängt. Setzt man dies mathematisch um, erhält man folgende Formeln:

$$r_t = \mu + \theta_1 r_{t-1} + \dots + \theta_p r_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \pi + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + p_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + p_r \sigma_{t-r}^2$$

Dies kann man wiederum für eine Varianzprognose nutzen:

$$\widehat{\sigma}_{t+1}^2 = \pi + \alpha_1 \widehat{\varepsilon}_t^2 + \dots + \alpha_q \widehat{\varepsilon}_{t-q}^2 + p_1 \sigma_t^2 + \dots + p_r \sigma_{t-r}^2$$

mit $\widehat{\varepsilon}_t^2 = (r_t - \mu - \theta_1 r_{t-1} - \dots - \theta_p r_{t-p})^2$

Wir haben einen GARCH(1,2,2)-Prozess für den DAX im Zeitraum zwischen 1. Januar 2000 und 30. August 2001 wie folgt empirisch ermittelt:

$$\widehat{r}_{t+1} = 6,0873 \cdot 10^{-4} - 0,0112 r_t + \varepsilon_{t+1}$$

$$\widehat{\sigma}_{t+1}^2 = 9,2316 \cdot 10^{-6} + 0,0619 \varepsilon_t^2 + 0,0729 \varepsilon_{t-1}^2 + 0,7387 \sigma_t^2 + 0,0673 \sigma_{t-1}^2$$

Im linken Teil von Abbildung 15 wird die Risikoprognose mit einem GARCH(2,2,2)-Prozess dargestellt (geringe Schwankung) und mit den tatsächlichen Varianzen (hohe Schwankung) verglichen. Im rechten Teil befinden sich die quadrierten Abweichungen.

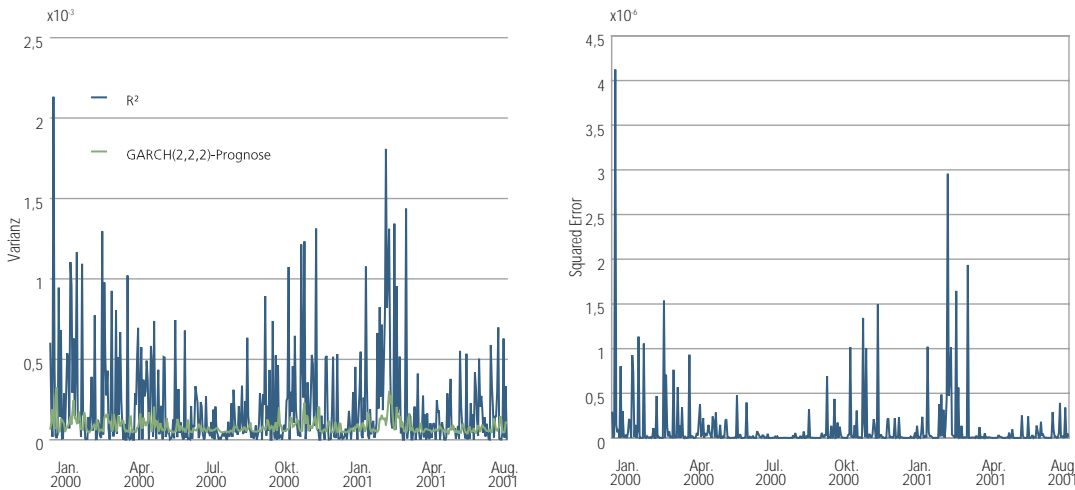


Abbildung 15:
Prognoseergebnisse eines
GARCH(2,2,2)-Verfahrens
für den DAX vom 01.01.2000
bis 30.08.2001
Links: Varianz-Prognose
mit GARCH(2,2,2)-Verfahren
Rechts: Squared Error der
Prognose

EGARCH(p,q,r)-Prozess und Prognose

Wie in Abschnitt 2.4 bereits nachgewiesen wurde, gibt es eine negative Korrelation zwischen Aktienrenditen und Volatilitätsänderungen. Der Leverage-Effekt führt dazu, dass negative Renditen mit höheren Volatilitäten einhergehen. Im Exponential-GARCH-Modell (EGARCH) wird diesem Umstand, der von den bisher vorgestellten Verfahren nicht berücksichtigt wurde, Rechnung getragen. Es gehört daher zur Klasse der asymmetrischen ARCH/GARCH-Modelle. Während der Renditeprozess nicht verändert wird, führt man eine logarithmische Transformation der bedingten Varianz durch. Dies erlaubt einen Verzicht auf die bisher notwendigen Parameterrestriktionen zur Gewährleistung einer positiven Varianz. Die EGARCH-Prozesse lassen sich wie folgt darstellen:

$$r_t = \mu + \theta_1 r_{t-1} + \dots + \theta_p r_{t-p} + \varepsilon_t,$$

$$\log \sigma_t^2 = \pi + \alpha_1 \frac{|\varepsilon_{t-1}^2|}{\sigma_{t-1}} + \dots + \alpha_q \frac{|\varepsilon_{t-q}^2|}{\sigma_{t-q}} + \beta_1 \frac{\varepsilon_{t-1}^2}{\sigma_{t-1}} + \dots + \beta_q \frac{\varepsilon_{t-q}^2}{\sigma_{t-q}} + p_1 \log \sigma_{t-1}^2 + \dots + p_r \log \sigma_{t-r}^2.$$

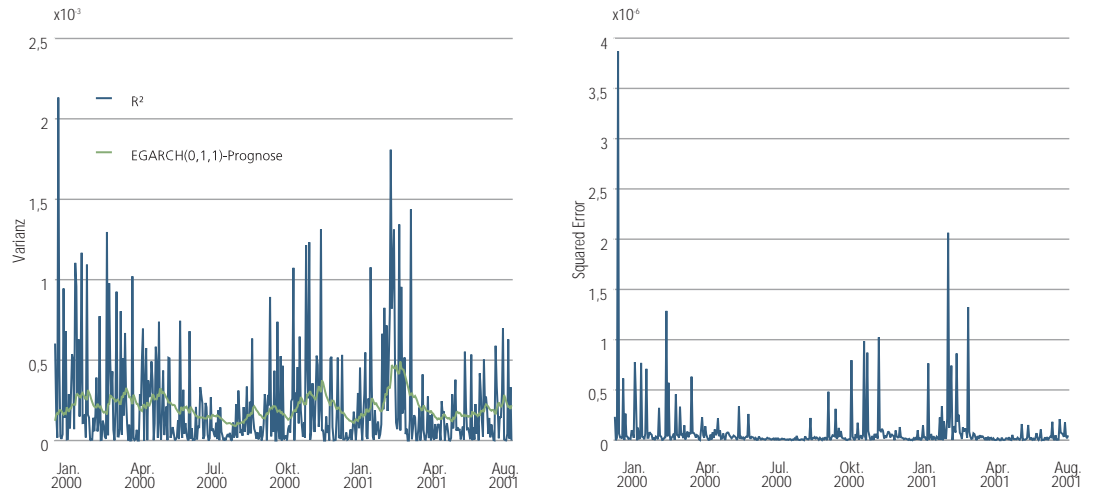
Die EGARCH(0,1,1)-Prognose erfolgt analog zum einfachen GARCH-Prozess und führt für den DAX im Zeitraum zwischen 1. Januar 2000 und 30. August 2001 zu folgendem empirischen Ergebnis:

$$\widehat{r}_{t+1} = 3,8343 \cdot 10^{-4} + \varepsilon_{t+1},$$

$$\log \sigma_{t+1}^2 = -0,17513 + 0,10381 \cdot \log \sigma_t^2 + 0,97981 \cdot \frac{|\varepsilon_t|}{\sigma_t} - 0,045339 \cdot \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}.$$

Der linke Teil von Abbildung 16 zeigt die Risikoprognose mit einem EGARCH(0,1,1)-Prozess (geringe Schwankung) und stellt dies den tatsächlichen Varianzen (hohe Schwankung) gegenüber. In der rechten Hälfte befinden sich die quadrierten Abweichungen.

Abbildung 16:
Prognoseergebnisse eines
EGARCH(0,1,1)-Verfahrens für
den DAX vom 01.01.2000
bis 30.08.2001
Links: Varianz Prognose
mit EGARCH(0,2,2)-Verfahren
Rechts: Squared Error der
Prognose



Stochastic-Volatility-Modell

Für die Klasse der Stochastic-Volatility-Modelle muss wie bei ARCH/GARCH die Varianz gemeinsam mit der Rendite modelliert werden. Gemeinsam ist diesen Verfahren der unterstellte Renditeprozess. Die Varianz hingegen ist nicht von den historischen Zufallsfehlern (z. B. ε_{t-1}) abhängig; sie wird also nicht als bedingte Varianz der Renditen modelliert, sondern direkt als stochastischer Prozess. Das heißt, es wird ein zusätzlicher Zufallsfehler bzw. Varianz-innovationsterm ergänzt. Dies erlaubt dem Varianzprozess höhere Flexibilität. Nach Poon / Granger (2003) führt dies zu Residuen im Renditeprozess, die näher an der Standardnormalverteilung liegen. Zudem lassen sie sich besser in die finanzwirtschaftliche Modellwelt, etwa bei der Bepreisung von Derivaten, integrieren.⁴⁶ Die zugrunde liegenden Prozesse sehen wie folgt aus:

$$r_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t,$$

$$\log \sigma_t - \alpha = \phi (\log \sigma_{t-1} - \alpha) + \eta_t,$$

wobei die Prozesse σ_t und ε_t stochastisch unabhängig sind.

⁴⁶ Vgl. Taylor (2005), S. 267.

Eine Prognose muss mithilfe eines Kalman-Filters erfolgen, da die Volatilität in diesem Modell nicht beobachtbar ist.⁴⁷ Ermittelt man anhand dieses Stochastic-Volatility-Modells die Prozesse empirisch für den DAX im Zeitraum zwischen 1. Januar 2000 und 30. August 2001, kommt man zu folgendem Ergebnis:

$$\widehat{r}_{t+1} = 3,8343 \cdot 10^{-4} + \sigma_{t+1} \varepsilon_{t+1},$$

$$\log \widehat{\sigma}_{t+1}^2 + 4,5846 = 0,95 (\log \sigma_t + 4,58460, 10381) + \eta_{t+1}.$$

Im linken Teil von Abbildung 17 wird die Risikoprognose mit einem Stochastic-Volatility-Modell dargestellt (geringe Schwankung) und mit den tatsächlichen Varianzen (hohe Schwankung) verglichen. Zur Ermittlung der Prognosegüte sind rechts die quadrierten Abweichungen dargestellt.

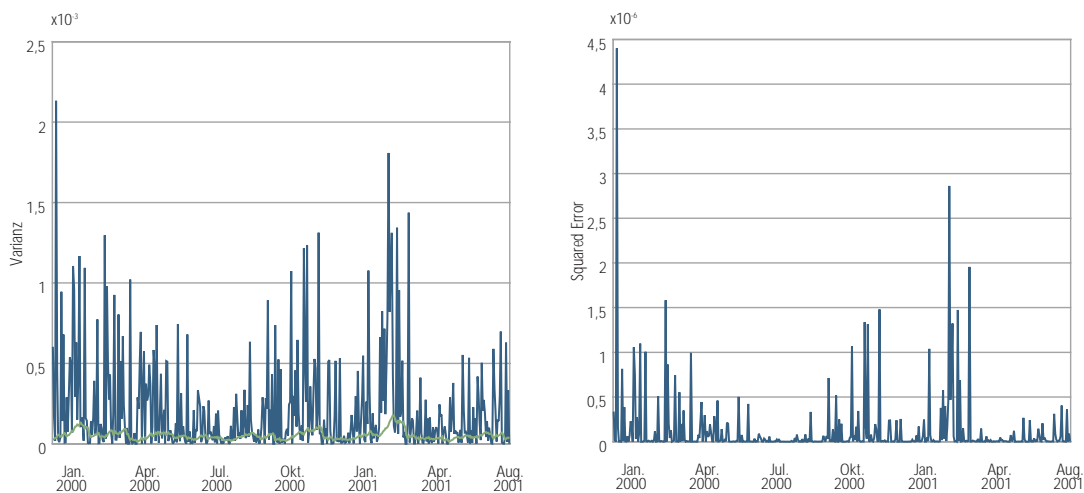


Abbildung 17:
Prognoseergebnisse eines
Stochastic-Volatility-Modells
für den DAX vom 01.01.2000
bis 30.08.2001
Links: Varianz-Prognose mit
Stochastic-Volatility-Modell
Rechts: Squared Error der
Prognose.

⁴⁷ Vgl. hierzu Taylor (2005).

V Optionspreistheoretisches Verfahren

i Optionspreisformeln ohne Dividendenzahlung

Die Optionspreisformel nach Black / Scholes ermittelt den Wert einer europäischen Kaufoption als Funktion des aktuellen Kurses, des Ausübungspreises sowie der Volatilität des zugrunde liegenden Basiswertes, der Restlaufzeit und des aktuellen Zinsniveaus für sichere Anlagen. Der Wert einer europäischen Kaufoption (Call) ergibt sich wie folgt. Zentrale Annahme ist die Normalverteilung der Renditen:

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-r_f T} N(d_2).$$

Der Preis einer europäischen Verkaufsoption (Put) lässt sich äquivalent ermitteln:

$$P = S_0 N(d_1) - Ke^{-r_f T} N(d_2).$$

$$\text{mit } d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_{fx} + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \text{ und } d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_{fx} + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ und } N(x)$$

als Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung sowie

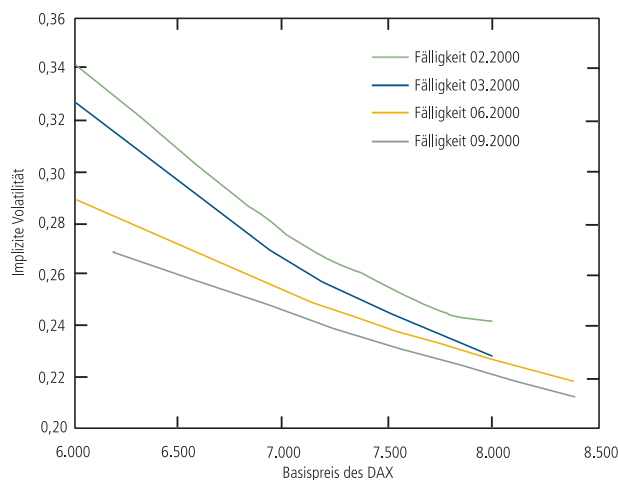
$$r_i \sim iid N(\mu, \sigma^2).$$

ii Implizite Volatilität als Prognose

Bei der Verwendung der impliziten Volatilität stößt man auf eine Schwierigkeit: den Volatility-Smile-Effekt. An Märkten wird üblicherweise eine große Zahl von Optionen mit unterschiedlichen Laufzeiten und Basispreisen auf dasselbe Underlying gehandelt. Berechnet man für diese Option die jeweilige implizite Volatilität, erkennt man, dass sie unterschiedliche Wert annimmt. Die Volatilität hängt von der Laufzeit und dem Basispreis ab (vgl. Abbildung 18).

Abbildung 18:
Volatility-Smile bzw. Skew-
Effekt, aktueller DAX-Wert
6750,76

Implizite Volatilitäten
von DAX Optionen
am 03.01.2000



Dies widerspricht zwar den modelltheoretischen Annahmen, ignoriert man dies aber, lässt sich daraus eine repräsentative, implizite Volatilität als Prognose ermitteln:⁴⁸

$$\hat{v}_{t+1}^2 = \sigma_{iv}^2$$

Im linken Teil von Abbildung 19 wird die Risikoprognose mit einem optionspreistheoretischen Verfahren dargestellt (geringe Schwankung) und mit den tatsächlichen Varianzen (hohe Schwankung) verglichen. Im rechten Teil befinden sich die quadrierten Abweichungen.

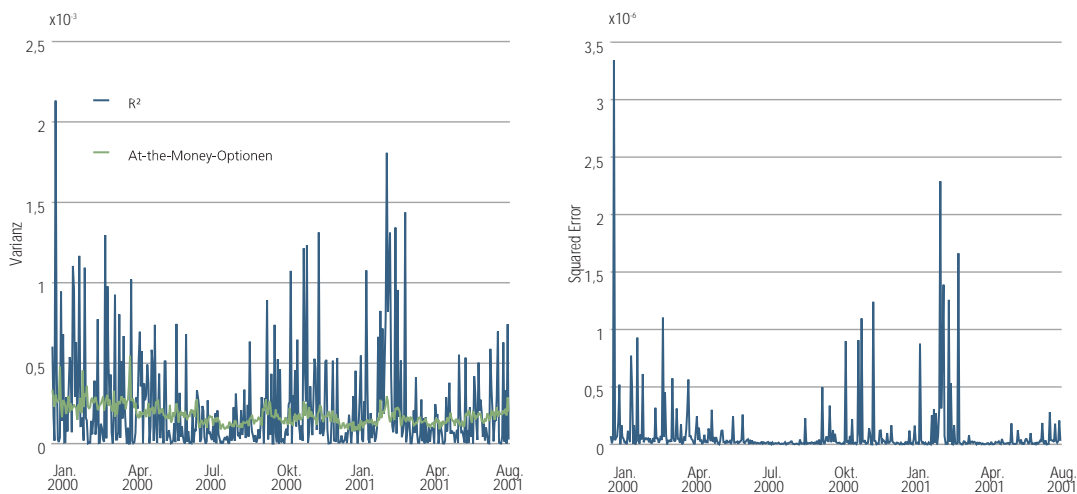


Abbildung 19:
Prognoseergebnisse eines
optionspreistheoretischen
Verfahrens für den DAX vom
01.01.2000 bis 30.08.2000
Links: Varianz-Prognose von
At-the-Money-Optionen
Rechts: Squared Error der
Prognose

Unterstellt man, wie in der Praxis häufig üblich, einen systematischen Fehler, lässt sich dieser mittels einer Regression bereinigen.⁴⁹ Die Prognose ergibt sich dann wie folgt:

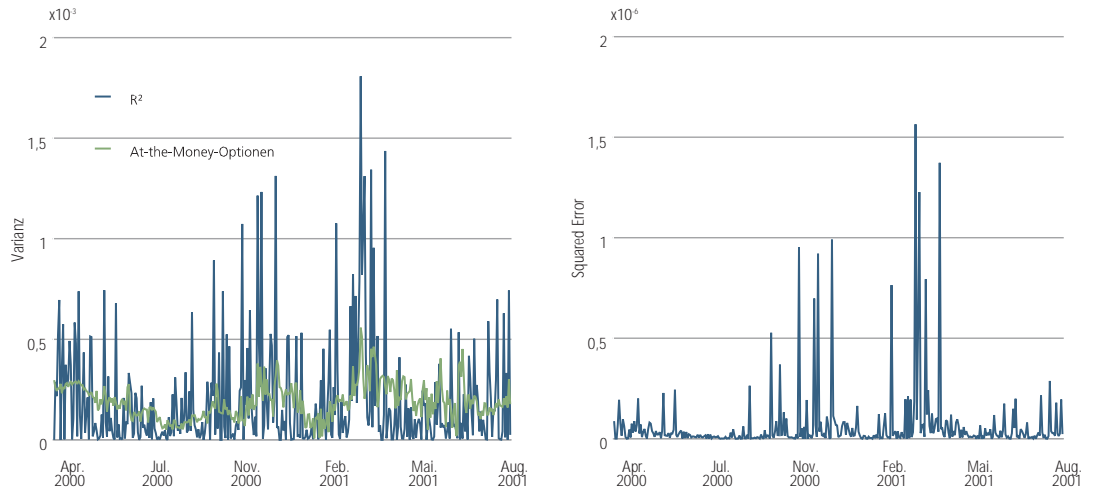
$$\hat{v}_{t+1}^2 = \alpha + \beta \sigma_t^2$$

⁴⁸ In Theorie und Praxis werden verschiedene Methoden zur Ermittlung der repräsentativen, impliziten Volatilität diskutiert. Eine Auswahl kann beispielsweise nach Laufzeitbändern oder Moneyness erfolgen. Die häufigsten Gewichtungsmethoden in der Praxis sind entsprechend der Sensitivität des Optionspreises auf eine Volatilitätsänderung (Options-Lambda), entsprechend der Volatilitätselastizität, nach Handelsvolumen oder eine einfache Gleichgewichtung.

⁴⁹ Zur Bereinigung wurden die letzten 80 Handelstage herangezogen.

Im linken Teil von Abbildung 20 wird die Risikoprognose für das bereinigte optionspreistheoretische Verfahren dargestellt (geringe Schwankung) und mit den tatsächlichen Varianzen (hohe Schwankung) verglichen. Im rechten Teil befinden sich die quadrierten Abweichungen.

Abbildung 20:
Prognoseergebnisse eines
bereinigten optionspreis-
theoretischen Verfahrens für
den DAX vom 24.04.2000
bis 30.08.2001
Links: Varianz-Prognose von
ATM Optionen mit Anpassung
Rechts: Squared Error der
Prognose



VI CPPI-Simulation

Die Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI) von Black / Jones (1987) ist ein dynamisches, regelgebundenes und prozyklisches Anlagekonzept zur Wertsicherung bzw. zur Begrenzung von Verlusten bei Kapitalanlagen. Um die Wirkung einer Risikoprognose zu testen werden Renditezeitreihen mit Hilfe des Bootstrapping-Verfahrens simuliert, auf die anschließend zwei CPPI-Strategien angewandt werden. Das Basisszenario basiert auf einer einfachen historische Risikoprognose. Im zweiten Fall erfolgt eine Volatilitäts- und damit VaR-Prognose.

Die CPPI-Simulation wurde unter folgenden Annahmen durchgeführt:

- Betrachtungszeitraum: 250 Tage
- Anzahl Simulationen: 5.000
- VaR-Niveau: 0,995%
- Haltedauer: 10 Tage
- Zinssatz: 2,92%
- Transaktionskosten: 0,25%
- Floor: 98%
- Threshold für eine Umschichtung: Min. Änderung von 5% des Exposures

Literatur

- Artzner, Philippe, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber und David Heath (1999): Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, 9, 203–228.
- Benk, Kay und Lutz Johanning (2008 a): Risiko- und Produktpräferenzen institutioneller Investoren, in: *Handbuch Vertriebs-Exzellenz im Asset Management*, Uhlenbruch Verlag, Bad Soden/Ts., 67–86.
- Benk, Kay und Lutz Johanning (2008 b): Anlagerestriktionen institutioneller Investoren, in: *Handbuch Vertriebs-Exzellenz im Asset Management*, Uhlenbruch Verlag, Bad Soden/Ts., 87–130.
- Bekaert, Geert und Guojun Wu (2000): Asymmetric volatility and risk in equity markets, *Review of Financial Studies*, 13, 1, 1–42.
- Black, Fischer (1976): Studies of stock market volatility changes. Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section, 177–181.
- Black, Fischer und Robert Jones (1987): Simplifying Portfolio Insurance, *Journal of Portfolio Management*, 13, 48–51.
- Bollerslev, Tim und Hao Zhou (2006): Volatility puzzles: a simple framework for gauging return-volatility regressions, *Journal of Econometrics*, 131, 1–2, 123–150.
- Braun, Phillip A., Daniel B. Nelson und Alain M. Sunier (1995): Good News, Bad News, Volatility, and Betas, *Journal of Finance*, 50, 5, 1575–1603.
- Campbell, John Y., Andrew Lo und Craig MacKinlay (1997): *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press., Princeton. N.Y.
- Campbell, John Y. und Ludger Hentschel (1992): No News is Good News: An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns, *Journal of Financial Economics*, 31, 3, 281–318.
- Chopra, Vijay K. und William Ziemba (1993): The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice, *Journal of Portfolio Management*, 19, 6–11.
- Christie, Andrew A. (1982): The stochastic behavior of common stock variances, *Journal of Financial Economics*, 10, 4, 407–432.
- Dichtl, Hubert (2001): *Ganzheitliche Gestaltung von Investmentprozessen*, Uhlenbruch Verlag, Bad Soden/Ts.
- Figlewski, Stephen und Xiaozu Wang (2000): Is the „Leverage Effect“ a Leverage Effect? Working Paper, Department of Finance, New York University.
- French, Kenneth R., William G. Schwert und Robert F. Stambaugh (1987): Expected Stock Returns and Volatility, *Journal of Financial Economics*, 19, 1, 3–29.
- Funke, Christian, Lutz Johanning und Bernd Rudolph (2006): *Verlust- und Risikopräferenzen institutioneller Anleger – Studie in Zusammenarbeit mit der Union Investment, Frankfurt*.
- Glosten, Lawrence R., Ravi Jagannathan und David E. Runkle (1993): Relationship between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *Journal of Finance*, 48, 1779–1802.
- Gospodinov, Nikolay, Athanasia Gavala, und Deming Jiang (2006): Forecasting Volatility, *Journal of Forecasting*, 25, 381–400.
- Green, William H. (2008): *Econometric Analysis*, Prentice Hall, New Jersey.
- Grinold, Richard C. und Ronald N. Kahn (2000): *Active Portfolio Management, A Quantitative Approach for Producing Superior Returns and Controlling Risk*, 2. Auflage, McGraw-Hill Professional, New York.
- Gujarati, Damodar N. (2003): *Basic Econometrics*, McGraw-Hill, Boston.
- Hamid, Shaikh A. und Zahid Iqbal (2004): Using neural networks for forecasting volatility of S&P 500 Index futures prices, *Journal of Business Research*, Vol. 57, No. 10–11, 1116–1125.
- Holt, Charles C. (1957): *Forecasting seasonals and trends by exponentially weighted moving averages*, Office of Naval Research, Research Memorandum, No. 52.
- Hornik, Kurt, Maxwell Stinchcombe und Hallbert White (1989): Multilayer feedforward networks are universal approximators, *Neural Networks*, 2, 5, 359–366.
- Jorion, Perridon (1985): International Portfolio Diversification with Estimation Risk, *Journal of Business*, 58, 3, 259–278.
- Jorion, Phillipe (2007): *Value at Risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk*, McGraw-Hill, New York.
- Kempf, Alexander und Christian Memmel (2002): Schätzrisiken in der Portfoliotheorie, in: *Handbuch Portfoliomangement*, 2. Auflage, Uhlenbruch Verlag, Bad Soden/Ts., 895–920.
- Litterman, Robert und Kurt Winkelmann (1998): *Estimating Covariance Matrices*, Goldman Sachs, Arbeitspapier, Goldman Sachs Investment Management Research.
- Markowitz, Henry M. (1952): Portfolio Selection, *Journal of Finance* 7, 77–91.

- Newbold, Paul and Clive W. J. Granger (1974): Experience with Forecasting Univariate Time Series and the Combination of Forecasts, *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 137, 2, 131–165.
- Petersmeier, Kerstin und Thorsten Poddig (2003): Integrierte Parameterschätzung für die Asset Allocation, in: *Handbuch Asset Allocation*, hrsg. von H. Dichtl, J. M. Kleeberg und C. Schlenger, Uhlenbruch Verlag, BadSoden/Ts.
- Pindyck, Robert S. (1984): Risk, Inflation, and the Stock Markets, *American Economic Review*, 74, 3, 334–351.
- Poddig, Thorsten, Hubert Dichtl und Kerstin Petersmeier (2007): *Statistik, Ökonometrie, Optimierung*, Uhlenbruch Verlag, Bad Soden/Ts.
- Poon, Ser-Huang und Clive W. J. Granger (2005): Practical Issues in Forecasting Volatility, *Financial Analysts Journal*, Jan/Feb 2005, 61, 1, 45–56.
- Poon, Ser-Huang, und Clive W. J. Granger (2003): Forecasting Volatility, *Financial Markets: A Review, Journal of Economic Literature*, 41, 2, 478–539.
- Schwert, William G. (1989): Why Does Stock Market Volatility Change over Time?, *Journal of Finance*, 44, 5, 1115–1153.
- Seddighi, H. R., K. A. Lawler und A. V. Katos (2000): *Econometrics, A practical approach*, Routledge, London.
- Sharpe, William F. (1987): *AAT Asset Allocation Tools*, 2nd ed., Redwood City.
- Stucki, Thomas (1994): Möglichkeiten und Grenzen eines Optimierungssystems im praktischen Portfolio Management, *Finanzmarkt und Portfolio Management*, S. 8, 4, 508–521.
- Taylor, Stephen J. (2005): *Asset Price Dynamics, Volatility, and Prediction*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Tobin, James (1958): Liquidity Preferences as Behavior Towards Risk, *Review of Economic Studies*, 5, 65–86.
- Vaughan, Emmett J. (1997): *Risk Management*, John Wiley & Sons, New York.
- Verbeek, Marno (2004): *A Guide to Modern Econometrics*, John Wiley & Sons, Chichester.
- Winters, Peter R. (1960): Forecasting sales by exponentially weighted moving averages, *Management Science*, 6, 3, 324–342.

Abbildungen

Abbildung 1:	Produktmatrix des Asset Management	6
Abbildung 2:	Breite des 95% Konfidenzintervalls für Rendite- und Varianzschätzung	8
Abbildung 3:	Renditen und Volatilitäten für den DAX vom 01.01.1993 bis 31.12.2003	9
Abbildung 4:	Rendite und Varianz für den DAX vom 01.01.1990 bis 31.08.2001	10
Abbildung 5:	Autokorrelation von Renditen und Varianzen und deren Signifikanzniveaus für den DAX vom 01.01.1990 bis 31.08.2001	11
Abbildung 6:	Prognoseergebnisse des GARCH(2,2,2)-Verfahrens für den DAX vom 01.01.2000 bis 30.08.2001	14
Abbildung 7:	Histogrammfunktionen der CPPI-Simulation	18
Abbildung 8:	Value at Risk für normalverteilte Gewinne und Verluste einer Vermögensposition Δw	22
Abbildung 9:	Optimales Gewicht für Aktie 1 in Abhängigkeit vom Schätzfehler	26
Abbildung 10:	Prognoseergebnisse eines Exponential-Smoothing-Verfahrens für den DAX vom 01.01.2000 bis 30.08.2001	28
Abbildung 11:	Prognoseergebnisse eines AR(6)-Verfahrens für den DAX vom 01.01.2000 bis 30.08.2001	30
Abbildung 12:	Prognoseergebnisse eines MA(4)-Verfahrens für den DAX vom 01.01.2000 bis 30.08.2001	31
Abbildung 13:	Prognoseergebnisse eines ARMA(3,3)-Verfahrens für den DAX vom 01.01.2000 bis 30.08.2001	32
Abbildung 14:	Prognoseergebnisse eines ARCH(1,2)-Verfahrens für den DAX vom 01.01.2000 bis 30.08.2001	35
Abbildung 15:	Prognoseergebnisse eines GARCH(2,2,2)-Verfahrens für den DAX vom 01.01.2000 bis 30.08.2001	36
Abbildung 16:	Prognoseergebnisse eines EGARCH(0,1,1)-Verfahrens für den DAX vom 01.01.2000 bis 30.08.2001	37
Abbildung 17:	Prognoseergebnisse eines Stochastic-Volatility-Modells für den DAX vom 01.01.2000 bis 30.08.2001	38
Abbildung 18:	Volatility Smile bzw. Skew-Effekt, aktueller DAX-Wert 6750,76	39
Abbildung 19:	Prognoseergebnisse eines optionspreistheoretischen Verfahrens für den DAX vom 01.01.2000 bis 30.08.2001	40
Abbildung 20:	Prognoseergebnisse eines bereinigten optionspreistheoretischen Verfahrens für den DAX vom 24.04.2000 bis 30.08.2001	41

Tabellen

Tabelle 1:	Schwankung der Rendite und der Volatilität für den DAX vom 01.01.1993 bis 31.12.2003	9
Tabelle 2:	Korrelation der Renditen und der Volatilitätsrenditen für den DAX vom 01.01.1993 bis 31.12.2003	12
Tabelle 3:	Prognosegüte der vorgestellten Verfahren bei der Varianzschätzung	15
Tabelle 4:	Prognosegüte der vorgestellten Verfahren bei der Renditeschätzung	15
Tabelle 5:	Ergebnisse der Vola-CPPI-Simulation für ein Jahr	17
Tabelle 6:	Fälle zur Bestimmung der Komponenten des Schätzrisikos	25
Tabelle 7:	Optimales Gewicht für Aktie 1 in Abhängigkeit vom Schätzfehler	25
Tabelle 8:	Autokorrelation für den DAX vom 01.01.1990 bis 31.08.2001	27
Tabelle 9:	In der empirischen Forschung übliche Signifikanzniveaus	27
Tabelle 10:	Ergebnisse für Engle's ARCH-Test für den DAX vom 01.01.2001 bis 30.08.2001	33



Herausgeber:

Union Investment Institutional GmbH
Wiesenhüttenstraße 10
60329 Frankfurt am Main

Telefon: 069 2567-0
Telefax: 069 2567-1616
institutional@union-investment.de
www.union-investment.de/institutional

Diese Broschüre wurde mit großer Sorgfalt entworfen und hergestellt, dennoch wird die Haftung auf grobes Verschulden beschränkt.

Stand: März 2009

003790 03.09